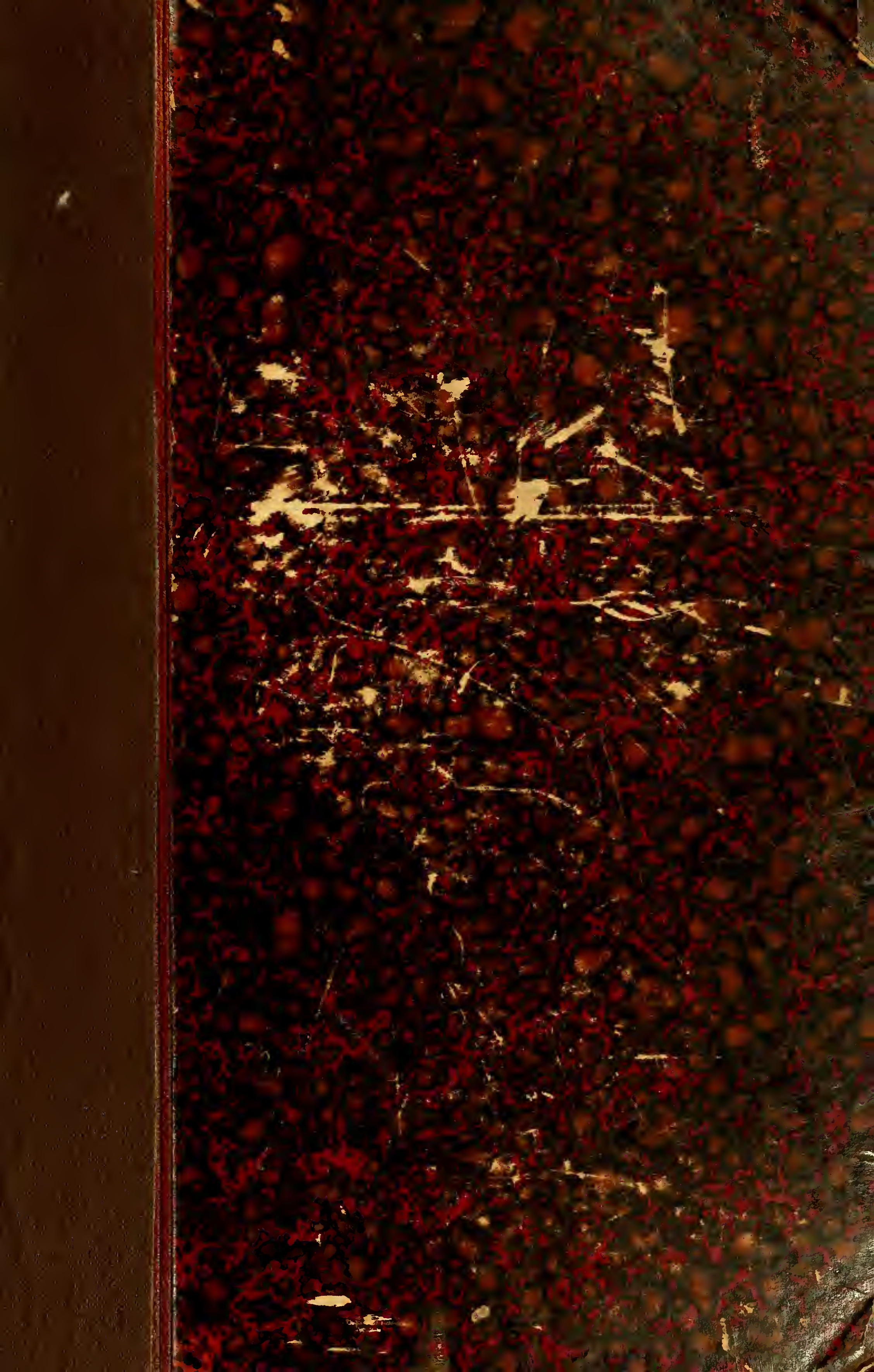



LVX
VERITAS
VIRTVS



LES

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

TOURS — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

LES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

Leçons professées pendant le premier trimestre 1892-1893

PAR

H. POINCARÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

RÉDIGÉES PAR M. Ch. MAURAIN
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ

PARIS
GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR
3, RUE RACINE, 3

1894

LES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

1. De nombreuses expériences ont été faites dans ces dernières années sur les oscillations électriques.

Hertz entreprit les siennes pour vérifier la théorie de Maxwell, à l'occasion d'une question mise au concours par l'Académie de Berlin. Il s'agissait de mettre en évidence l'action électrodynamique des variations d'un champ électrique. Hertz fit d'abord usage des décharges d'une bouteille de Leyde ou d'une bobine de Ruhmkorff, mais il s'aperçut bientôt qu'il était nécessaire d'avoir recours à des oscillations plus rapides. Certains appareils de démonstration, qu'il eut l'occasion de voir à Carlsruhe, le frappèrent et le conduisirent à modifier heureusement les dispositions expérimentales. Ainsi la théorie de Maxwell, d'une part, une particularité expérimentale observée par Hertz, d'autre part, voilà le point de départ des expériences de Hertz.

Occupons-nous d'abord de la théorie.

CHAPITRE PREMIER

EXPOSÉ DE LA THÉORIE

2. Les idées de Maxwell. — Maxwell, avant de publier son grand et célèbre traité, avait écrit quelques ouvrages dans lesquels on trouve des idées qu'il a répudiées plus tard. Mais, même dans son ouvrage principal, on rencontre plusieurs théories peu conciliables. Hertz considère que le fond même des idées de Maxwell se trouve dans les équations qu'il obtient, et qu'une théorie peut être regardée comme équivalente à celle de Maxwell, pourvu qu'elle conduise aux mêmes équations. Ainsi, la théorie de Helmholtz contient, comme cas particulier, celle de Maxwell, et cependant Maxwell n'aurait pas admis cette interprétation, dans laquelle les actions à distance jouent encore un rôle.

3. Action électrique. — En allant de l'idée de la simple action à distance immédiate à l'action par l'intermédiaire d'un milieu, on peut se placer à plusieurs points de vue (1) :

(1) Hertz, *Untersuchungen über Ausbreitung der electrischen Kraft*, p. 23 (Leipzig, Barth, 1892) ; voir aussi *Lumière électrique* du 21 mai 1892, p. 388.

1° *Action à distance.* — Elle exige la présence des deux corps entre lesquels elle s'exerce ; tant qu'un des corps existe seul, il n'y a pas d'action électrique : c'est le point de vue astronomique de l'attraction réciproque.

2° *Point de vue de la théorie du potentiel.* — On suppose que, quand un corps électrisé existe seul, il émet déjà la force électrique, qui existe ainsi avant qu'on introduise dans le champ un autre corps électrisé. A ce point de vue, dans l'espace compris entre les deux armatures d'un condensateur s'exerce un phénomène mystérieux produisant le champ.

3° *Polarisation du diélectrique.* — On suppose les diélectriques formés de cellules qui s'électrisent par influence. Entre les armatures d'un condensateur se trouveraient les cellules électrisées par influence, et les forces seraient dues non seulement aux électricités des deux armatures, mais aussi aux électricités des cellules. C'est le point de départ de la théorie de Poisson.

On peut attribuer aux cellules le rôle principal : alors les forces à distance ne jouent plus qu'un rôle petit, mais on ne peut les supprimer sans supprimer aussi l'action par influence sur les cellules. C'est l'idée de Helmholtz.

4° *Suppression de toute action à distance.* — C'est l'idée fondamentale de Maxwell. Le champ consiste alors en une certaine polarisation du diélectrique. Mais le livre de Maxwell ne s'explique pas complètement en partant de là. Hertz explique ainsi ce défaut de clarté :

1° Le mot électricité est employé dans plusieurs sens différents : le sens vulgaire, le sens de fluide incompressible, etc.;

2° Maxwell a publié d'abord une théorie compliquée qu'il a ensuite abandonnée, mais en en laissant subsister des débris. On retrouve le tout mélangé dans son livre classique.

En somme, la conclusion de Hertz est que le texte de Maxwell est obscur, mais que ses équations sont ce qui caractérise sa théorie. Il a donc essayé, en se plaçant au dernier point de vue, celui de Maxwell, de faire une théorie conduisant aux équations de ce dernier, en ne cachant pas que probablement Maxwell l'aurait répudiée.

C'est cette théorie de Hertz que nous allons exposer.

4. Principes de la théorie de Hertz. — Hertz a publié un Mémoire : *Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps immobiles* (¹), et un autre : *Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en mouvement* (²). Il y aurait à faire des réserves sur cette distinction, car les actions électriques sont mesurées au moyen de petits corps qui sont mis en mouvement et changent ainsi le champ : on peut supposer qu'ils le changent peu.

Les notations de Hertz ne sont pas les mêmes que celles de Maxwell : nous les donnerons toutes deux.

Nous ne suivrons pas tout à fait l'ordre de Hertz : Hertz pose ses équations, puis montre qu'elles ne sont en contradiction avec aucun fait ; ici nous partirons des faits expérimentaux connus avant Hertz et, avec quelques hypothèses,

(¹) Hertz, *Nachrichten von der Kœnigl. Gesellschaft*, mars 1890, ou *Lumière électrique* du 19 juillet 1890 et numéros suivants.

(²) Hertz, *Wied. Ann.*, t. 41, p. 369 ; ou *Lumière électrique* du 6 décembre 1890 et numéro suivant.

nous arriverons aux équations. Cela aura l'avantage de montrer quelles hypothèses il faut faire.

5. Force électrique. Force magnétique. — Hertz ne définit pas d'abord l'électricité et le magnétisme, mais la force électrique et la force magnétique.

La présence d'un champ électrique se manifeste par les actions mécaniques éprouvées par les corps qu'on y introduit ; de même pour un champ magnétique.

Un champ électrique peut exister sans champ magnétique, mais à une condition, c'est qu'il soit invariable, et réciproquement : si l'un des deux champs est variable, l'autre existe forcément. Inutile d'ajouter qu'on pourrait avoir simultanément un champ électrique fixe et un champ magnétique fixe.

Hertz suppose le champ électrique bien déterminé quand on se donne en chaque point la valeur d'un vecteur qu'on appelle la force électrique.

On la définit ainsi :

Soit un petit corps électrisé placé dans le champ ; il subira l'action d'une force de composantes X, Y, Z, et c'est cette force qu'on appelle la force électrique.

De même, un pôle d'une aiguille aimantée placé dans un champ subira l'action d'une force de composantes L, M, N, qu'on appelle la force magnétique.

Nous supposerons que, pour définir le champ électrique et le champ magnétique, il suffit de donner la valeur de X, Y, Z, L, M, N en tous les points du champ.

6. Unité de la force électrique et de la force magné-

tique. — Nous supposons le champ bien déterminé par la valeur de la force en chaque point. Cela revient à faire l'hypothèse suivante : Il y a unité de la force électrique et de la force magnétique.

Un champ magnétique, par exemple, peut être développé soit par des aimants, soit par des courants; supposons-le produit par un aimant ; un pôle magnétique placé dans un tel champ subit une certaine action. Si nous supposons maintenant le champ produit par un courant, ce courant pourra être choisi de façon à produire sur le pôle la même action que précédemment. Si dans ces deux champs, équivalents par leur action sur le pôle, mais différents par leur origine, on introduit un courant, il subira une certaine action. Il n'est pas évident *a priori* que cette action sera la même dans les deux cas. La première hypothèse de Maxwell est l'unité de la force magnétique : il suppose que l'action sera la même dans les deux cas.

De même, un champ électrique peut être développé soit électrostatiquement par des conducteurs chargés, soit électrodynamiquement par des phénomènes d'induction. D'ailleurs il peut exercer des actions différentes : si on y introduit un fil conducteur, il s'y produira un courant; si on y introduit un conducteur chargé, celui-ci subira un déplacement. Supposons deux champs électriques équivalents au point de vue de leur action sur un conducteur chargé, ces deux champs n'étant pas identiques quant à leur cause. Il n'est pas évident que ces deux champs seront équivalents au point de vue de la production de courants : nous le supposerons et nous pourrons ensuite le vérifier expérimentalement.

7. Exceptions : Magnétisme permanent. Dispersion. — Hertz indique de suite deux cas d'exception où la connaissance des deux vecteurs X, Y, Z, L, M, N ne suffit pas pour déterminer toutes les propriétés du champ électromagnétique :

1° *Magnétisme permanent.* — Une force magnétique L, M, N détermine dans un morceau de fer doux une aimantation de composantes μL, μM, μN, μ étant ce qu'on appelle le coefficient de perméabilité magnétique. Ce nouveau vecteur ne dépend que de la force magnétique :

Mais, dans un morceau d'acier, où une partie de l'aimantation antérieure persiste, l'aimantation pourra avoir une direction différente de celle du vecteur L, M, N; elle dépendra de ce vecteur et aussi de l'aimantation antérieure.

2° *Dispersion.* — L'autre exception se rattache à la théorie de la dispersion de Helmholtz. Il représente une substance transparente comme formée d'atomes d'éther et d'atomes matériels ; quand la lumière passe à travers cette substance, les atomes d'éther sont mis en mouvement, ainsi que les atomes matériels ; il faut plusieurs vecteurs pour définir l'état du milieu, et il n'est pas évident qu'ils ne dépendent que de L, M, N, X, Y et Z.

8. Définition de la force électrique et de la force magnétique en un point d'un diélectrique. — Nous avons défini ces deux forces en un point du vide ou de l'éther. Dans un diélectrique, il faut supposer, avant l'introduction du petit corps électrisé qui permet de définir X, Y, Z, qu'on a taillé un petit cylindre de vide dont la section est très petite par rapport à sa hauteur et dont les génératrices sont parallèles

à la direction même de la force. Il semble y avoir là un cercle vicieux, puisqu'on se sert de la direction de la force pour définir cette force elle-même : on peut supposer qu'on opère par tâtonnements.

On définira de même la force magnétique L, M, N dans un diélectrique.

9. La définition des deux forces n'est pas encore complète, car l'action électrique dépend de la charge du corps dont nous nous servons pour définir la force ; de même la force magnétique n'est déterminée qu'à un facteur constant près.

Il nous faut définir l'unité de force électrique et l'unité de force magnétique. Hertz s'appuie pour cela sur l'expression de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique d'un champ.

10. Expression de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique d'un champ ([1]). — L'expérience montre que le travail mécanique produit dans le déplacement infiniment petit des corps placés dans un champ électrostatique est égal à la variation éprouvée par l'intégrale :

$$\int \frac{\varepsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2).\, d\tau$$

où $X^2 + Y^2 + Z^2$ représente le carré de la force électrique;

$d\tau$, un élément de volume;

ε, un coefficient différent pour les différents corps et dépendant de l'unité de force électrique adoptée.

([1]) *Lumière électrique* du 19 juillet 1890, p. 139.

On l'appelle le coefficient d'induction électrostatique. L'énergie électrique d'un champ est donc représentée par :

$$\int \frac{\varepsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) . d\tau$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume du champ.

De même, l'énergie magnétique d'un champ est représentée par l'intégrale :

$$\int \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2) . d\tau$$

μ étant un coefficient appelé coefficient d'induction magnétique (ou de perméabilité magnétique) qui est variable avec le corps et dépend de l'unité de force magnétique adoptée.

11. Choix des unités de force. — Hertz les choisit de façon que pour le vide ou l'éther on ait $\varepsilon = \mu = 1$. Pour les autres milieux, ε et μ seront des constantes différentes de l'unité ; μ, par exemple, sera le rapport du coefficient de perméabilité magnétique du corps à celui du vide, ε le rapport des coefficients d'induction électrostatique. Cherchons les dimensions des deux forces. $\frac{\varepsilon}{8\pi}$ est une constante. $d\tau$, élément de volume, a pour dimensions l^3. D'ailleurs, l'énergie, qu'on peut supposer représentée par le produit d'une force par un déplacement, a pour dimensions :

$$l \frac{lm}{t^2}.$$

D'après l'expression de l'énergie électrique, X^2 a donc pour dimensions :

$$\frac{ml^2t^{-2}}{l^3}$$

ou :

$$ml^{-1}\,t^{-2}$$

Donc X a pour dimensions : $m^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2}}t^{-1}$.

De même, L a pour dimensions : $m^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2}}t^{-1}$.

Comparons ces résultats à ceux donnés par les systèmes ordinaires d'unités :

En unités électrostatiques, les dimensions des forces sont :

Force électrique, $m^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2}}t^{-1}$

Force magnétique, $m^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2}}t^{-1}\times\frac{t}{l}$.

En unités électromagnétiques :

Force électrique, $m^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2}}t^{-1}\times\frac{t}{l}$

Force magnétique, $m^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2}}t^{-1}$

En somme, Hertz rapporte au système électrostatique l'unité de force électrique, et au système électromagnétique l'unité de force magnétique.

Comparaison avec les notations de Maxwell. — Maxwell désigne par α, β, γ les composantes de la force magnétique. Les composantes X, Y, Z de la force électrique sont représentées par :

$$X = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}$$

$$Y = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy}$$

$$Z = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}$$

Il sépare, en somme, la force électrique d'induction de la force électrique due aux conducteurs chargés.

La constante μ garde cette désignation, mais Maxwell remplace ε par K.

En employant le système électromagnétique, K est l'inverse du carré d'une vitesse (en particulier pour le vide ce sera l'inverse du carré de la vitesse de la lumière).

12. Inductions électrique et magnétique. — Ce sont des vecteurs ayant pour composantes :

L'induction électrique,	εX	εY	εZ
L'induction magnétique,	μL	μM	μN

et que Maxwell désigne par les notations :

$$-4\pi f \qquad -4\pi g \qquad -4\pi h$$

et :

$$a \qquad b \qquad c$$

13. Flux de force et flux d'induction. — Définissons d'abord le flux de force électrique. Considérons le vecteur X, Y, Z et l'élément de surface $d\omega$. Soit P la projection du vecteur sur la normale à l'élément, dont les cosinus directeurs sont α, β, γ.

Le produit $P.d\omega$ est la définition du flux de force électrique qui traverse l'élément.

P est égal à $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$. Le flux de force qui traverse l'élément $d\omega$ a donc pour expression :

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\, d\omega$$

Les trois autres flux se définissent de la même façon, au

moyen des trois autres vecteurs, et ont pour expressions :

Flux d'induction électrique, $\varepsilon\,(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\,d\omega$
Flux de force magnétique, $(\alpha L + \beta M + \gamma N)\,d\omega$
Flux d'induction magnétique, $\mu\,(\alpha L + \beta M + \gamma N)\,d\omega$.

14. Quantité d'électricité. — On pourrait exposer toute la théorie sans parler de quantité d'électricité ; nous allons cependant la définir pour mieux montrer les rapports de notre théorie avec la théorie classique.

Électricité vraie. — Soit une surface fermée, et considérons le flux d'induction électrique qui la traverse. C'est :

$$\int \varepsilon.\,d\omega.\,(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)$$

En divisant cette expression par 4π, nous obtiendrons une nouvelle expression nous définissant l'électricité vraie :

$$\int \frac{\varepsilon.d\omega}{4\pi}\,(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)$$

Ainsi, dans la théorie ordinaire, la quantité d'électricité est quelque chose de presque matériel : ici, c'est une expression analytique.

Partons de là et cherchons la quantité d'électricité contenue dans un élément de volume $d\tau$, c'est-à-dire cherchons la densité de l'électricité vraie.

Nous allons pour cela nous servir du théorème suivant : Soit une surface fermée quelconque, $d\omega$ un élément de la surface, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale vers l'exté-

rieur, et F une fonction quelconque. On a :

$$\int\int \alpha . d\omega . \mathrm{F} = \int\int\int \frac{d\mathrm{F}}{dx} \cdot d\tau.$$

Ici, nous pouvons appliquer ce théorème et écrire :

$$\int \alpha . d\omega . \frac{\varepsilon \mathrm{X}}{4\pi} = \int \frac{1}{4\pi} \frac{d.\varepsilon \mathrm{X}}{dx} \cdot d\tau.$$

$$\int \beta . d\omega . \frac{\varepsilon \mathrm{Y}}{4\pi} = \int \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d.\varepsilon \mathrm{Y}}{dy} \cdot d\tau.$$

$$\int \gamma . d\omega . \frac{\varepsilon \mathrm{Z}}{4\pi} = \int \frac{1}{4\pi} \frac{d.\varepsilon \mathrm{Z}}{dz} \cdot d\tau.$$

En additionnant membre à membre ces relations, on obtient dans le premier membre de la somme la quantité d'électricité vraie contenue à l'intérieur de la surface, et on voit qu'on peut la représenter par :

$$\int \frac{d\tau}{4\pi} \left[\frac{d.\varepsilon \mathrm{X}}{dx} + \frac{d.\varepsilon \mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\varepsilon \mathrm{Z}}{dz} \right],$$

de sorte que la quantité d'électricité vraie contenue dans un volume $d\tau$ est :

$$\frac{d\tau}{4\pi} \cdot \sum \cdot \frac{d.\varepsilon \mathrm{X}}{dx}$$

et la densité de l'électricité vraie est :

$$\frac{1}{4\pi} \sum \cdot \frac{d.\varepsilon \mathrm{X}}{dx}.$$

C'est, en somme, l'équation de Poisson mise sous cette forme par Hertz.

Électricité libre. — L'électricité libre se définit en remplaçant le flux d'induction par le flux de force.

L'expression de l'électricité libre contenue dans une surface fermée peut s'écrire :

$$\int \frac{d\omega}{4\pi}(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = \int \frac{d\tau}{4\pi} \cdot \sum \frac{dX}{dx} \cdot$$

La densité de l'électricité libre est donc :

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \sum \cdot \frac{dX}{dx} \cdot$$

15. Pour montrer la différence qui existe entre ces deux quantités d'électricité, considérons un conducteur chargé et un diélectrique séparé du conducteur par de l'air. Dans la conception de l'électricité vraie, il y a de l'électricité vraie à la surface du conducteur, mais il n'y a rien à la surface du diélectrique.

Au second point de vue, il y a de l'électricité libre à la surface du conducteur et la densité y est la même que celle de l'électricité vraie, mais de plus il y a de l'électricité libre à la surface du diélectrique, ce qu'on exprime en disant qu'il est polarisé.

Si nous restons en électrostatique, pour calculer l'action exercée sur un point, il faut appliquer la loi de Coulomb en considérant l'électricité libre. Pour les courants, au contraire, intervient l'électricité vraie.

Supposons maintenant le conducteur environné par le diélectrique. Il y a de l'électricité vraie à la surface du conducteur, il n'y en a pas sur le diélectrique. Il y a de l'électricité libre à la surface du diélectrique et aussi à la surface de

séparation du conducteur et du diélectrique, mais sa densité n'est plus égale à celle de l'électricité vraie : le rapport de la densité de l'électricité vraie à la densité de l'électricité libre à la surface de séparation est ε.

16. Quantité de magnétisme. Magnétisme vrai. Magnétisme libre. — On procèderait comme pour l'électricité pour définir les quantités de magnétisme. La densité du magnétisme vrai sera :

$$\frac{1}{4\pi}\sum \cdot \frac{d.\mu L}{dx}$$

et celle du magnétisme libre :

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \sum \cdot \frac{dL}{dx} \cdot$$

Supposons en présence un aimant permanent et un morceau de fer doux séparés par de l'air.

Au point de vue du magnétisme vrai, il y a du magnétisme dans l'aimant permanent et pas dans le morceau de fer doux.

Au point de vue du magnétisme libre, il y a du magnétisme dans les deux : c'est le magnétisme libre qu'on considère habituellement.

17. Remarque. — Supposons un système de conducteurs et de diélectriques environné par le vide. La somme des quantités d'électricité libre est égale à la somme des quantités d'électricité vraie. En effet, comme on suppose tous les éléments $d\omega$ de la surface enveloppante situés dans le vide, $\varepsilon = 1$ et les deux intégrales sont identiques. Ceci a encore sensiblement lieu quand le système est environné d'air.

18. Induction électromagnétique. — La loi de l'induction électromagnétique est un fait expérimental : la force électromotrice dans un circuit fermé est égale à la variation du flux d'induction magnétique qui traverse une surface limitée par le circuit.

Projetons la force électrique sur un élément de circuit, nous obtiendrons la force électromotrice exercée sur cet élément :

$$X.dx + Y.dy + Z.dz.$$

La force électromotrice totale est :

$$\int X dx + Y dy + Z dz.$$

En appelant F le flux d'induction qui traverse une surface limitée par le circuit, on a donc :

$$\int X dx + Y.dy + Z.dz = A.\frac{dF}{dt}.$$

En écrivant cette relation, nous faisons des hypothèses sur lesquelles il faut appeler l'attention :

1° Il faut admettre que la force électromotrice est proportionnelle (ou égale, suivant l'unité) à la force électrique qui s'exercerait sur un petit conducteur chargé, placé au point considéré : c'est l'hypothèse de l'unité de force électrique ;

2° Nous supposons que la présence de notre petit circuit et des courants qui y passent modifie peu X, Y, Z ;

3° Enfin, on admet que la loi énoncée plus haut, tirée de faits expérimentaux particuliers, est générale ; on fait toujours une hypothèse analogue quand on tire une loi de faits expérimentaux, lesquels sont toujours particuliers.

19. Transformons l'équation que nous venons d'obtenir. Pour cela, considérons un élément de surface $d\omega$ et prenons la normale à cet élément comme axe des x. L'induction magnétique a pour projections :

$$\mu L, \mu M, \mu N.$$

En particulier, sa projection sur ox est $L\mu$ et l'équation précédente nous donne ici :

$$A. \frac{d.\mu L}{dt} \cdot d\omega = \int (Y.dy + Zdz)$$

L'intégrale curviligne du second membre peut être transformée en une intégrale double étendue à la surface entourée par le contour fermé :

$$\int \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) dy.dz.$$

Comme ici la surface est infiniment petite, il reste:

$$A \frac{d.\mu L}{dt} \cdot d\omega = \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) d\omega.$$

On obtiendrait de même deux équations analogues, de sorte qu'on a le système suivant d'équations :

$$A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}$$

$$A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

Remarque. — La force électromotrice d'induction n'est

égale à la variation du flux que si on adopte le même système d'unités pour les forces électrique et magnétique. Ce n'est pas ce que nous avons fait ici ; nous avons rapporté la force électrique au système C.G.S. électrostatique, et L, M, N au système C.G.S. électromagnétique ; aussi, la force électromotrice est seulement proportionnelle à la variation du flux, et A est différent de l'unité ; c'est l'inverse de la vitesse de la lumière.

20. Définition du courant. — Dans certains corps appelés conducteurs, il se produit, quand la force électrique y est différente de o, un phénomène se traduisant par l'échauffement du conducteur. La quantité de chaleur produite pendant un temps dt, dans un élément $d\tau$ du volume (supposé homogène), peut se représenter, d'après la loi de Joule, par :

$$\lambda\,(X^2 + Y^2 + Z^2).\,d\tau.dt,$$

λ étant un coefficient qui dépend de la nature du corps et qui est nul pour les corps non conducteurs. Nous supposons cette quantité de chaleur évaluée en unités C.G.S. de travail. Le produit $(X^2 + Y^2 + Z^2)\,d\tau$ représente une quantité d'énergie ; donc le produit $\lambda.dt$ doit être un nombre, c'est-à-dire que λ est l'inverse d'un temps ; Maxwell remplace λ par c ; c'est la conductibilité.

Supposons que nous ayons affaire à un conducteur non homogène ; il se produit ce qu'on appelle un phénomène Peltier, une absorption ou un dégagement de chaleur. La quantité de chaleur produite peut alors s'écrire :

$$\lambda.dt.d\tau.\left(\sum\cdot X^2 - \sum\cdot XX'\right)\cdot$$

L'effet Peltier est ainsi représenté par :

$$-\lambda.dt.d\tau.\sum.XX'.$$

X', Y', Z' étant des constantes que nous appellerons *par définition*, les composantes de la force électromotrice de contact : c'est ainsi que nous définissons cette force électromotrice.

Comme cas particulier, le phénomène de Peltier comprend le phénomène thermique qui a lieu dans les piles, et qui sert justement à entretenir l'énergie des piles.

Les composantes du courant seront *définies* par :

$$u = \lambda(X - X')$$
$$v = \lambda(Y - Y')$$
$$w = \lambda(Z - Z')$$

Si on veut, ceci est l'expression de la loi de Ohm ; mais ici c'est une définition. Nous ne pouvons plus prendre la définition ordinaire du courant, qui est la suivante :

$u.d\omega$ est la quantité d'électricité vraie qui traverse un élément de surface d'étendue $d\omega$, perpendiculaire à l'axe des x ; et, en effet, nous ne regardons plus l'électricité vraie comme une véritable matière, mais comme une simple intégrale.

Considérons cependant la quantité d'électricité vraie E qui se trouve à l'intérieur d'une certaine surface fermée s ; soit un élément $d\omega$ de la surface où les composantes du courant ont pour valeur u, v, w. Considérons (u, v, w) comme un vecteur et projetons-le sur la normale. Cette projection a pour expression :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale.

On pourrait appeler flux de courant à travers l'élément $d\omega$ la quantité :

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w)\ d\omega,$$

mais ceci n'aurait pas de sens pour nous, car nous n'avons rien dit du mouvement de l'électricité.

Avec l'ancienne définition du courant, l'égalité :

$$\frac{dE}{dt} = -\int(\alpha u + \beta v + \gamma w).\ d\omega$$

exprime que l'augmentation de la charge à l'intérieur de la surface est égale et de signe contraire à la quantité d'électricité qui sort à travers la surface ; elle est donc évidente par elle-même.

Avec nos définitions, le sens précédent ne subsiste plus, mais nous conserverons l'équation en la regardant comme l'expression d'un fait expérimental.

21. Transformons l'équation précédente en appliquant le théorème exprimé par :

$$\int \alpha.F.d\omega = \int \frac{dF}{dx} \cdot d\tau.$$

On peut l'écrire :

$$\frac{dE}{dt} = -\int\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) \cdot d\tau.$$

Mais nous avons d'autre part (14) :

$$E = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(\frac{d.\varepsilon X}{dx} + \frac{d.\varepsilon Y}{dy} + \frac{d.\varepsilon Z}{dz}\right),$$

d'où :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d.}{dt}\int\frac{d\tau}{4\pi}\left(\frac{d.\varepsilon X}{dx} + \frac{d.\varepsilon Y}{dy} + \frac{d.\varepsilon Z}{dz}\right).$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{dE}{dt}$, on obtient l'équation

$$\frac{d.}{dt}\cdot\sum\cdot\frac{d.\varepsilon X}{dx} = -4\pi\sum\frac{du}{dx}.$$

22. Application du principe de la conservation de l'énergie. — Nous allons maintenant appliquer le principe de la conservation de l'énergie et tirer de là et de nos définitions les équations fondamentales de la théorie.

Nous avons à envisager plusieurs sortes d'énergie :

$$\text{L'énergie électrique, } E = \int\frac{\varepsilon . d\tau}{4\pi}\cdot\sum\cdot X^2\,;$$

$$\text{L'énergie magnétique, } H = \int\frac{\mu . d\tau}{4\pi}\cdot\sum L^2$$

En outre, la chaleur produite par les courants, due aux phénomènes de Joule et de Peltier ; nous désignerons par J.*dt* la quantité totale de chaleur produite par les courants pendant le temps *dt*.

Comme nous n'avons pas à considérer ici de travail mécanique, le principe de la conservation de l'énergie s'exprimera par l'équation :

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dH}{dt} + J = 0.$$

Calculons séparément chaque terme :

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{\varepsilon . d\tau}{4\pi} \sum . X \frac{dX}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\mu . d\tau}{4\pi} \sum L \frac{dL}{dt}.$$

Nous allons transformer cette dernière expression en nous servant des équations du paragraphe 19,

$$A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}; \text{ etc.}$$

On aura :

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{d\tau}{4A\pi} \sum . L \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right).$$

Remarquons que $\sum . L \frac{dZ}{dy}$ est la somme des trois termes :

$$L \frac{dZ}{dy} + M \frac{dX}{dz} + N \frac{dY}{dx}$$

et que cette somme peut s'écrire $\sum . M \frac{dX}{dz}$, puisque, par permutation, on retrouve bien les trois termes.

De même on peut écrire $\sum . N \frac{dX}{dy}$ au lieu de $\sum . L \frac{dY}{dz}$. On a alors :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{4A\pi} \left[\int \sum . M \frac{dX}{dz} d\tau - \int N \frac{dX}{dy} d\tau \right]$$

Nous allons transformer cette expression en employant un procédé de calcul analogue à l'intégration par parties.

Nous savons que pour une surface fermée quelconque et une fonction F quelconque

$$\int \gamma F d\omega = \int \frac{dF}{dz} \cdot d\tau$$

Appliquons ce théorème en faisant $F = MX$. On obtient :

$$\int \gamma . MX . d\omega = \int M \frac{dX}{dz} d\tau + \int X \frac{dM}{dz} d\tau. \qquad (1)$$

On obtiendra de même :

$$\int \beta NX . d\omega = \int N \frac{dX}{dy} d\tau + \int X \frac{dN}{dy} d\tau. \qquad (2)$$

Nous pouvons écrire deux autres équations analogues à (1) et deux autres analogues à (2). Additionnons membre à membre les six équations ainsi obtenues, en changeant les signes des trois équations du dernier groupe.

Pour simplifier, désignons par Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

dont le développement va se trouver dans le premier membre de la somme. Cette somme peut s'écrire :

$$\int \Delta . d\omega = 4 . A\pi \frac{dH}{dt} + \int d\tau . \sum . X \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \right),$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\Delta . d\omega}{4A\pi} - \int \frac{d\tau}{4A\pi} \cdot \sum X \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \right).$$

Dans cette expression, H représente l'énergie magnétique contenue dans un volume limité par une surface fermée S ; la première intégrale est étendue à tous les éléments de cette surface, et la deuxième à tous les éléments du volume enveloppé.

Étendons cette équation au cas de l'espace indéfini ; les perturbations que nous aurons à considérer sont des perturbations locales ; nous pouvons donc considérer le champ comme nul à l'infini ; les éléments de la surface enveloppante étant à l'infini, la première intégrale est nulle, et il reste :

$$\frac{dH}{dt} = -\int \frac{d\tau}{4A\pi} \sum . X \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \right).$$

D'ailleurs, nous avons trouvé :

$$J = \int \lambda . \sum \cdot X \; (X - X') . \, d\tau$$

et nous avons posé : $u = \lambda \, (X - X')$.

Nous avons donc formé tous les termes de notre équation primitive, qui peut alors s'écrire :

$$\int \frac{d\tau .}{4A\pi} \sum \cdot X \left[A\varepsilon \frac{dX}{dt} - \frac{dM}{dz} + \frac{dN}{dy} + 4\pi A u \right] = 0$$

Telle est l'équation qui exprime la conservation de l'éner-

gie ; elle nous conduit à poser :

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u + \xi$$

$$A\varepsilon \frac{dy}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi A v + \eta$$

$$A\varepsilon \frac{dz}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi A w + \zeta$$

Nous nous proposons maintenant de démontrer que ξ, η, ζ sont nuls.

L'équation de la conservation de l'énergie devient :

$$\int d\tau \, (X\xi + Y\eta + Z\zeta) = 0.$$

Quelle hypothèse pouvons-nous faire sur ξ, η, ζ ? Il y en a une qui est naturelle, c'est que ξ, η, ζ sont des fonctions linéaires de X, Y, Z, L, M, N et de leurs dérivées prises par rapport à x, y, z, les dérivées par rapport au temps pouvant être remplacées par leur valeur en fonction des précédentes.

Supposons le champ seulement électrostatique : alors L, M, N sont nulles ; $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$ et $\frac{dZ}{dt}$ sont également nulles, puisqu'alors le champ électrique est constant ; enfin u, v, w sont nulles, puisqu'il n'y a pas de courants.

On a donc :

$$\xi = 0 \qquad \eta = 0 \qquad \zeta = 0$$

quelles que soient les composantes X, Y, Z. Si ξ, η, ζ s'annulent, quelles que soient X, Y et Z, pourvu que L, M et N soient seuls, c'est que ξ, η et ζ sont des fonctions linéaires de L, M, N et de leurs dérivées par rapport à x, y, z. Ce fait ne peut être compatible avec notre dernière équation que si l'on

a dans tous les cas :

$$\xi = 0 \qquad \eta = 0 \qquad \zeta = 0$$

ce qui permet de simplifier le groupe des trois équations précédentes.

23. Équations fondamentales. — Nous avons donc obtenu successivement les deux groupes suivants d'équations :

$$A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dz}{dy} - \frac{dy}{dz}$$

$$A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dz}{dx}$$

$$A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

et d'autre part :

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u$$

$$A\varepsilon \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi A v$$

$$A\varepsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi A w$$

Nous venons de déduire ces équations, qui sont les équations fondamentales de la théorie de Hertz, du principe de la conservation de l'énergie, ce qui semblerait montrer que les anciennes théories étaient en désaccord avec ce principe. Il n'en est rien. Dans la théorie de Hertz, l'énergie électrique est la même, que le champ soit produit par des conducteurs chargés ou par des phénomènes d'induction, tandis que, dans les anciennes théories, on supposait bien une énergie au champ produit électrostatiquement, mais on supposait dénué d'énergie électrique un champ dû à des phénomènes d'induction.

24. Cas d'un diélectrique. — Les équations se simplifient lorsqu'on les applique à un point compris dans un diélectrique, et non dans un corps conducteur. En effet, u, v, w disparaissent alors ; le premier groupe d'équations ne change pas, mais le second devient :

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}$$

$$A\varepsilon \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}$$

$$A\varepsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}$$

On peut, dans ce cas, passer du premier groupe d'équations au second en changeant X, Y, Z en L, M, N et μ en $-\varepsilon$.

25. Théorème de Poynting. Vecteur radiant. — Considérons l'énergie totale comprise dans un volume donné de diélectrique limité par une surface fermée S.

J est nul puisqu'il s'agit d'un diélectrique.

Calculons les variations de E et de H.

Nous avons trouvé :

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\Delta . d\omega}{4A\pi} - \int \frac{d\tau}{4A\pi} \sum \cdot X \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right);$$

d'ailleurs :

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{\varepsilon . d\tau}{4\pi} \sum \cdot X \frac{dX}{dt},$$

expression que l'on peut transformer au moyen des équations du paragraphe 24 et écrire :

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{d\tau}{4A\pi} \sum \cdot X \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right).$$

En additionnant membre à membre ces deux relations, il vient :

$$\frac{d\,(E + H)}{dt} = \int \frac{\Delta . d\omega}{4A\pi}.$$

Considérons maintenant un vecteur a, b, c dont les composantes ont pour valeur :

$$a = \frac{1}{4A\pi} (YN - ZM)$$

$$b = \frac{1}{4A\pi} (ZL - XN)$$

$$c = \frac{1}{4A\pi} (XM - YL)$$

Remarquons que le produit $a\alpha + b\beta + c\gamma$ n'est autre chose que le développement du déterminant Δ, divisé par $4A\pi$. L'équation précédente peut donc s'écrire :

$$\frac{d.\,(E + H)}{dt} = \int (a\alpha + b\beta + c\gamma).\, d\omega.$$

Elle s'interprète alors facilement de la façon suivante : Considérons un fluide fictif remplissant l'espace et dont les molécules ont en un point une vitesse représentée par le vecteur a, b, c. La quantité de ce fluide qui passerait à travers l'élément $d\omega$ situé autour du point serait précisément :

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma).\, d\omega,$$

de sorte que l'équation précédente peut s'exprimer ainsi : La variation de la quantité d'énergie existant dans le volume considéré est proportionnelle à la quantité de ce fluide qui traverse la surface enveloppante.

On peut appeler a, b, c le vecteur radiant; on voit qu'il est perpendiculaire à la fois aux vecteurs X, Y, Z et L, M, N, et que ses composantes sont proportionnelles aux projections sur

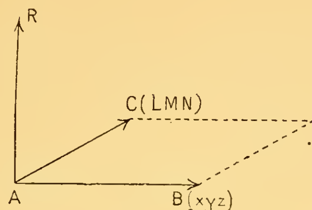


Fig. 1.

les trois plans de coordonnées du parallélogramme construit sur les deux vecteurs AB (XYZ) et AC (LMN) (*fig.* 1).

26. Contradiction apparente avec la théorie d'Ampère. — Dans la théorie d'Ampère, on arrive à des équations de la forme :

$$4\pi A u = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy},$$

qui comprennent un terme de moins que nos équations et qui paraissent incompatibles avec elles. Remarquons d'abord que, dans le cas de courants fermés stationnaires, il y a accord entre les deux séries d'équations, puisque les dérivées telles que $\frac{dX}{dt}$ sont alors nulles. Même en opérant avec des courants variables les termes tels que $A\varepsilon \frac{dX}{dt}$ sont très petits, puisque A est l'inverse de la vitesse de la lumière : il faudrait des oscillations très rapides pour que ces termes prennent une valeur sensible, et ici déjà apparaît l'idée des expériences de Hertz.

27. Comparaison avec les notations de Maxwell. — On peut écrire les équations que nous avons obtenues sous la forme suivante :

$$\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} = 4\pi A \left[u + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{dX}{dt} \right]$$
$$\frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} = 4\pi A \left[v + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{dY}{dt} \right]$$
$$\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} = 4\pi A \left[w + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{dZ}{dt} \right]$$

On voit qu'elles sont identiques aux équations d'Ampère, à condition de considérer, en plus du courant considéré ordinairement, un courant fictif qu'on appelle courant de déplacement, et dont les composantes sont :

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{dX}{dt}, \qquad \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{dY}{dt}, \qquad \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{dZ}{dt}.$$

Maxwell appelle p, q, r le courant que nous désignons par u, v, w ; le courant de déplacement est représenté par :

$$\frac{df}{dt} \qquad \frac{dg}{dt} \qquad \frac{dh}{dt}.$$

Le courant total a alors pour composantes :

$p + \frac{df}{dt}$, que Maxwell désigne par u

$q + \frac{dg}{dt}$ » » v

$r + \frac{dh}{dt}$ » » w

28. Application des équations fondamentales. — De ces équations on peut déduire tous les faits antérieurement connus.

Conservation de l'électricité. — En différentiant les trois équations du paragraphe précédent, la première par rapport à x, la deuxième par rapport à y, et la troisième par rapport à z et en ajoutant membre à membre les trois équations ainsi obtenues, il vient :

$$A \frac{d}{dt} \cdot \sum \frac{d.\varepsilon X}{dx} = - 4\pi A \sum \cdot \frac{du}{dx};$$

et nous avons vu (paragraphes 20 et 21) que cette équation exprime la conservation de l'électricité vraie.

Théorèmes d'électrostatique. — Dans ce cas on a :

$$\frac{dL}{dt} = 0 \qquad \frac{dM}{dt} = 0 \qquad \frac{dN}{dt} = 0$$

et les équations du paragraphe 23 donnent :

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0$$
$$\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0$$
$$\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0$$

On conclut de là que X, Y, Z sont les dérivées par rapport à x, y, z d'une fonction V qu'on appelle le potentiel. On a :

$$X.dx + Y.dy + Zdz = dV.$$

En faisant $\varepsilon = 1$ pour plus de simplicité, on trouve pour la densité de l'électricité vraie en un point :

$$\frac{1}{4\pi} \sum \cdot \frac{dX}{dx} = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \Delta V.$$

cette expression de la densité constitue l'équation de Poisson.

Conservation du magnétisme vrai. — En différentiant par rapport à x, y, z respectivement les trois premières équations du paragraphe 23 et en les ajoutant ensuite membre à membre, on obtient :

$$A. \frac{d.}{dt}\left[\frac{d.\mu L}{dx} + \frac{d.\mu M}{dy} + \frac{d.\mu N}{dz}\right] = 0.$$

Cette équation, d'après l'expression précédemment obtenue pour la densité du magnétisme vrai, exprime que la quantité de magnétisme vrai qui se trouve en un point est constante.

Rappelons que, pour évaluer le magnétisme vrai, on tient compte seulement du magnétisme permanent, tandis que dans l'évaluation du magnétisme libre on tient compte aussi du magnétisme d'induction.

Lois de Joule, d'Ohm. — Elles ont été satisfaites par nos hypothèses.

Lois de l'induction et de l'action des courants. — Elles sont exprimées par les deux groupes d'équations fondamentales du paragraphe 23.

Cas d'un diélectrique. — On a alors $u = v = w = 0$.

En éliminant entre les six équations fondamentales soit X, Y, Z, soit L, M, N, on obtient des équations du second ordre qui sont précisément les équations du mouvement de l'éther, les équations fondamentales de l'optique.

Ainsi la théorie mise sous cette forme par Hertz n'est contredite par aucun des faits anciennement connus ; les expériences plus récentes de Hertz qu'il me reste à décrire tendent à la rendre de plus en plus vraisemblable.

CHAPITRE II

LES OSCILLATIONS HERTZIENNES

29. Théorie de Sir William Thomson. — Nous allons exposer d'abord la théorie qui a précédé les expériences de Hertz, celle de Thomson.

Considérons un condensateur dont les armatures sont chargées de quantités $+q$ et $-q$ d'électricité. Nous supposerons qu'il n'y a pas d'électricité à la surface du fil conducteur par lequel nous réunissons les armatures ce qui revient à dire que nous négligeons la capacité du fil. En prenant comme sens positif du courant un sens tel que le courant augmente les charges des deux armatures, nous pourrons écrire en désignant par i l'intensité du courant de décharge :

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Pour trouver les lois qui régissent ce courant, nous allons écrire que le produit de la résistance par l'intensité du courant est égal à la somme des forces électromotrices.

Cette somme se compose de deux termes : la différence de potentiel des deux armatures, qu'on doit affecter du signe —, puisqu'elle tend à produire un courant diminuant les charges des deux armatures, et la force électromotrice d'induction.

En désignant par C la capacité du condensateur et par L la self-induction du circuit, on peut donc écrire :

$$Ri = -\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt}.$$

En remplaçant i par sa valeur en fonction de q, on obtient :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Cette équation est une équation linéaire à coefficients constants. Elle a pour intégrale générale :

$$q = A_1e^{\alpha_1 t} + A_2e^{\alpha_2 t},$$

où A_1A_2 sont des constantes et $\alpha_1\alpha_2$ les racines de l'équation :

$$L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0.$$

Les racines ont pour valeurs :

$$\alpha = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

et la condition de réalité de ces racines est :

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$$

ou :

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

1° Si cette condition est remplie, α_1 et α_2 sont des quantités réelles et négatives. Donc q va constamment en décroissant et tend vers 0 quand le temps augmente indéfiniment. La décharge est alors continue.

2° Si :

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

α_1 et α_2 sont imaginaires. On peut alors transformer l'expression de q. Posons :

$$\beta = \frac{2L}{R};$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{4L^2}{R^2}}$$

les racines deviennent :

$$-\beta + i\gamma$$

et :

$$-\beta - i\gamma.$$

q sera une fonction de $e^{-\beta t + i\gamma t}$ et de $e^{-\beta t - i\gamma t}$, et par suite de $e^{-\beta t}$. $\cos\gamma t$ et de $e^{-\beta t}\sin\gamma t$.

On aura :

$$q = e^{-\beta t}\,[B_1 \cos\gamma t + B_2 \sin\gamma t],$$

B_1 et B_2 étant des constantes.

La décharge se compose alors d'oscillations périodiques à amplitude décroissante. La période est :

$$T = \frac{2\pi}{\gamma}.$$

Lorsque $\frac{R^2}{4L^2}$ sera petit par rapport à $\frac{1}{LC}$, ce qui aura lieu

quand les oscillations seront très rapides, on pourra écrire avec une approximation suffisante :

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

et :

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

(Formule de Thomson.)

30. Tentatives de vérifications expérimentales. — *Expériences de Feddersen* [1]. — Feddersen observait l'étincelle produite par la décharge d'une bouteille de Leyde au moyen d'un miroir tournant concave; il a aussi projeté l'image de l'étincelle, au moyen d'un tel miroir, sur une plaque sensible et il a ainsi photographié les divers aspects de l'étincelle.

Il a fait varier la résistance du circuit : avec une faible résistance, il obtenait une décharge oscillante, et son dispositif lui permettait de voir comment variait la période quand il faisait varier la capacité du condensateur ou la self-induction du circuit.

Pour faire varier la capacité, il suffisait de changer le nombre des bouteilles de Leyde : Feddersen a à peu près vérifié la proportionnalité de la période à $\sqrt{C}$.

Pour faire varier la self-induction, Feddersen changeait la longueur du fil conducteur ; la vérification de la proportionnalité à $\sqrt{L}$ ne se fit pas bien : il n'y a rien là d'étonnant, car nous avons négligé dans la théorie la capacité de ce fil ; or, dans les expériences de Feddersen, sa longueur atteignait

[1] Feddersen, *Annales de Ch. et Ph.*, t. LXIX, p. 178 (1863).

parfois plusieurs centaines de mètres ; il était suspendu au mur et formait avec lui un véritable condensateur dont la capacité n'était pas négligeable vis-à-vis de celle du condensateur principal.

Quant au coefficient numérique 2π, Feddersen n'a pu en vérifier la valeur, car il ne connaissait pas bien la valeur de la capacité de ses condensateurs : il n'a pu vérifier que des proportionnalités. La théorie que nous venons d'exposer ne permet guère de douter de la valeur de ce coefficient ; cependant on pourrait se demander si les lois d'induction sont les mêmes que pour une décharge lente, quand on arrive à une rapidité très grande des oscillations.

Feddersen a obtenu des périodes de l'ordre de 10^{-4} secondes.

En augmentant graduellement la valeur de la résistance, ce qu'il faisait en intercalant dans le circuit de petits tubes pleins d'acide sulfurique, il a obtenu des décharges continues, puis des décharges intermittentes, ces dernières pour des valeurs très grandes de la résistance, par exemple avec des cordes mouillées.

Expériences faites au moyen de tubes de Geissler. — Elles permettent bien de montrer la périodicité de la décharge, mais non de trouver les lois de cette périodicité.

Expériences de M. Mouton (1). — Elles ont été faites avec une bobine d'induction ; le phénomène oscillatoire était provoqué dans l'induit par la rupture du courant inducteur ; il était mis en évidence de la façon suivante : un système de roues permettait d'ouvrir l'inducteur à un certain moment, puis de mettre les deux extrémités de l'induit en communica-

(1) Mouton, Thèse, 1876.

tion avec les bornes d'un électromètre, un certain temps avec l'ouverture de l'inducteur ; en faisant varier ce temps, on obtenait l'état des deux extrémités de l'induit à différentes phases de la période.

Mais, dans ces expériences, on ne peut espérer vérifier les lois de la périodicité de la décharge, parce que la bobine tout entière forme, en somme, un condensateur ne remplissant pas les conditions exigées par la théorie.

Possibilité d'oscillations plus rapides. — Puisque la période est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

on peut espérer diminuer la durée de la période en diminuant L et C. Mais pourra-t-on le faire au-delà d'une certaine limite avec une intensité suffisante pour permettre d'observer des effets d'induction par exemple ?

Pour comprendre le problème qui se pose, comparons les oscillations électriques à celles d'un pendule.

Pour faire osciller un pendule, il faut l'écarter de sa position d'équilibre et faire ensuite disparaître la cause qui le maintenait écarté de cette position. Mais il faut que cette cause disparaisse rapidement, en un temps petit, par rapport à la durée d'une oscillation ; si, par exemple, ce temps était le quart de la durée d'une oscillation complète, le pendule serait justement revenu à sa position d'équilibre au moment où cesserait la cause qui l'en maintenait écarté : il garderait cette position et n'oscillerait pas.

Ici, nous avons quelque chose d'analogue : il faudra que la cause qui écarte le système de son état d'équilibre, c'est-à-dire, par exemple, dans les expériences de Feddersen, la

charge de la batterie, disparaise en un temps très court par rapport à la durée d'une oscillation, qui est elle-même très petite.

31. Expériences de Hertz [1]. — Hertz a résolu ce problème au moyen d'un appareil nommé excitateur (*fig.* 2). Deux capacités en forme de sphères sont prolongées par un conducteur, au centre duquel se trouve une solution de continuité, limitée par deux petites boules dont on peut faire varier la distance. A chacune de ces deux extrémités aboutit l'une des extrémités du fil induit d'une bobine d'induction.

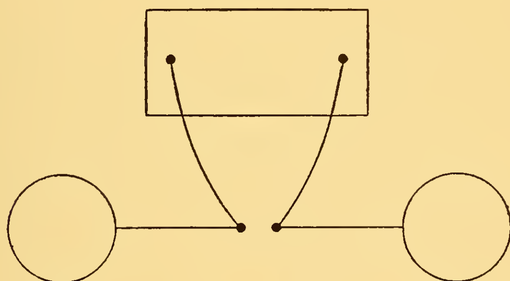


Fig. 2.

Les deux moitiés de l'excitateur se chargent l'une positivement, l'autre négativement, et le micromètre à étincelles est le siège d'une force contre-électromotrice qui tend à empêcher l'équilibre de se rétablir. Quand la différence de potentiel est suffisante, l'étincelle éclate et le courant qui se produit est dû non seulement à la neutralisation des électricités des deux sphères, mais encore au courant de décharge de la bobine.

Des oscillations se produisent alors.

[1] *Wied. Annalen*, t. XXXI, XXXIV, XXXVI.

Le fait capital est cette propriété particulière de l'étincelle que rien ne faisait prévoir : quand elle se produit, la force contre-électromotrice qui empêchait l'équilibre de se rétablir est supprimée au bout d'un temps très court, très court même par rapport à la durée d'une oscillation, qui est pourtant de l'ordre de 10^{-8} secondes.

Le rôle de la bobine est double, elle sert : 1° à charger les deux extrémités de l'excitateur ; 2° à faire disparaître brusquement la force contre-électromotrice qui s'oppose au rétablissement de l'équilibre.

Si nous reprenons la comparaison d'un pendule, nous aurons un phénomène analogue à celui qui se passe ici en l'écartant au moyen d'un fil de sa position d'équilibre et en provoquant la rupture brusque du fil, ce qui permet au pendule d'entrer en oscillation.

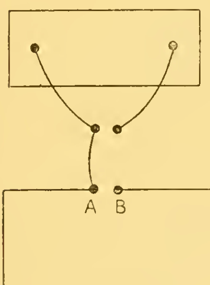


Fig. 3.

Voici dans quelles circonstances Hertz a découvert cette propriété de l'étincelle.

Premières expériences de Hertz. — Hertz se servit d'une bobine d'induction, les deux extrémités de l'induit formant un interrupteur à étincelles. Une des extrémités de cet interrupteur était mise en communication avec un rectangle conducteur portant lui-même un petit interrupteur à étincelles AB (*fig.* 3).

Il constata qu'à ce petit interrupteur se produisaient des étincelles beaucoup plus fortes qu'il ne s'y serait attendu. A se charge d'abord, B ensuite et, bien que le temps que l'électricité met à parcourir le rectangle soit très petit, la

différence de potentiel est assez grande pour que l'étincelle jaillisse entre A et B.

Ce fait prouve que la force contre-électromotrice existant entre A et B est rapidement détruite.

Hertz a trouvé que le phénomène dépendait de l'étincelle propre de la bobine de Ruhmkorff, qu'on peut appeler l'étincelle primaire en réservant le nom d'étincelle secondaire à celle qui se produit entre A et B. Si cette étincelle jaillit entre deux pointes, ou entre une pointe et une sphère, ou entre une pointe et un plan, au lieu de jaillir entre deux sphères, les étincelles sont moins fortes en AB.

Quelquefois, on n'obtient pas d'étincelles en AB sans qu'on sache trop pourquoi. Avec un peu d'habitude, on peut arriver, rien qu'en voyant l'étincelle primaire, à prévoir s'il se produira ou non une étincelle secondaire.

Influence de la lumière. — Hertz observa encore un fait très curieux : les étincelles primaire et secondaire paraissaient exercer l'une sur l'autre une action mystérieuse ; en mettant entre les deux un écran, les étincelles secondaires cessaient de se produire. Hertz crut d'abord qu'il y avait là une action électrique, mais reconnut ensuite que ce phénomène était dû à la lumière de l'étincelle.

Pourtant, une plaque de verre, qui laisse passer la lumière, empêchait l'action des étincelles l'une sur l'autre. C'est que les rayons actifs, en cette circonstance, sont les rayons ultra-violets, qui sont arrêtés par le verre : en effet, une plaque de fluorine, qui laisse passer les rayons ultra-violets, laisse aussi subsister l'action des étincelles primaires.

Autres dispositions employées par Hertz. — Hertz a aussi employé la disposition indiquée dans la figure 4 : il réu-

nit une des extrémités du micromètre à étincelles à un rectangle portant au milieu, du côté opposé à celui où se trouve le point d'attache, un petit interrupteur. Si le point A est au milieu du côté du rectangle, et que celui-ci ait ses deux moitiés bien symétriques, la décharge doit mettre le même temps à parcourir les deux parties du rectangle, c'est-à-dire que le potentiel a toujours la même valeur aux deux boules de l'interrupteur; il ne doit donc pas y avoir d'étincelles, ce que l'expérience vérifie. Mais, en détruisant la symétrie d'une manière quelconque, par exemple en ajoutant sur un des côtés du rectangle une petite capacité, on fait apparaître l'étincelle.

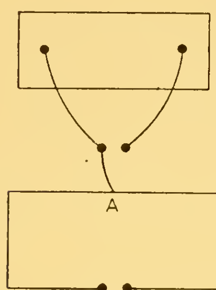


Fig. 4.

Hertz eut l'idée de supprimer la communication entre le premier interrupteur et le rectangle : malgré cela, des étincelles se produisaient à l'interrupteur du rectangle.

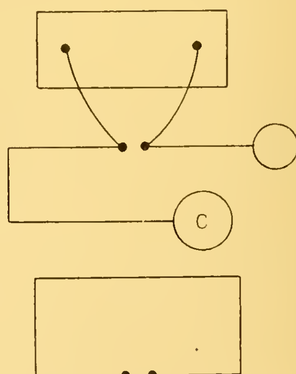


Fig. 5.

Enfin, il employa le dispositif de la figure 5: l'une des extrémités du premier interrupteur est reliée à un conducteur C. Dans ces conditions, il obtint encore des étincelles à l'interrupteur du rectangle; il n'en obtenait plus en réunissant les deux boules du premier interrupteur.

De ces expériences il conclut que ce sont les oscillations se produisant au premier interrupteur qui produisent sur le rectangle l'effet observé.

32. Excitateurs et résonateurs. — Le rectangle dont nous venons de parler constitue ce qu'on appelle un résonateur, de sorte que les premières expériences de Hertz nous ont permis de décrire une forme d'excitateur et une forme de résonateur.

Au lieu de deux capacités sphériques, Hertz a quelquefois employé pour constituer un excitateur des plateaux métalliques.

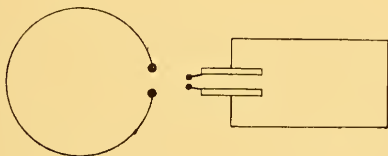


Fig. 6.

Les deux sphères avaient environ $0^m,15$ de rayon, et le fil qui les réunissait, sur lequel était ménagé un interrupteur, avait environ $1^m,50$. Quant aux plateaux employés par Hertz à la place des sphères, ils étaient carrés et avaient $0^m,40$ de côté.

M. Blondlot a employé un résonateur ayant la forme représentée par la partie droite de la figure 6.

D'autres formes ont encore été adoptées par différents expérimentateurs : nous y reviendrons à mesure que nous décrirons leurs expériences.

33. Calcul de la période de l'excitateur de Hertz. —

Les oscillations que l'on obtient avec cet excitateur sont trop rapides pour qu'on puisse les étudier au moyen des procédés qui ont servi à Feddersen et à Mouton. On doit calculer leur période d'après la formule :

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Les deux sphères de l'excitateur de Hertz sont assez éloignées l'une de l'autre pour qu'on puisse négliger leur influence électrostatique. La charge de l'une d'elles étant q, son potentiel V sera donné par :

$$q = C'V = 15.V.$$

Les deux sphères sont chargées d'électricités de signes contraires, leurs potentiels sont égaux et de signes contraires, la différence de potentiel entre les deux boules de l'interrupteur est donc 2V, et la capacité de l'ensemble, qui est égale au quotient de la charge d'une des armatures par la différence de potentiel des deux armatures, est :

$$C = \frac{q}{2V} = 7,5$$

Quant au coefficient de self-induction, il est donné, pour un courant fermé, par la formule de Neumann :

$$L = \int\int \frac{ds.ds'. \cos \varepsilon}{r},$$

formule qui a été vérifiée expérimentalement.

Pour l'excitateur, bien que le circuit ne soit pas fermé, nous appliquerons la même formule, qui dans le cas d'un

courant ouvert n'a pas encore reçu de vérification expérimentale.

En appelant l la longueur du fil et d son diamètre, on trouve, en supposant que le courant circule seulement à sa surface :

$$L = 2l\left[\log. \frac{4l}{d} - 1\right].$$

Si on admettait, comme le fait Hertz, que la distribution du courant est uniforme, c'est-à-dire que la densité du courant est la même au centre qu'à la surface, on obtiendrait la formule :

$$L = 2l. \left[\log \frac{4l}{d} - 0{,}75\right].$$

Mais Thomson a montré que, pour des courants oscillant aussi rapidement, la propagation ne peut s'effectuer que par la surface. D'ailleurs, la différence entre les deux formules est très petite.

Remarquons que, si on prend pour L et C les unités électromagnétiques, $\sqrt{LC}$ est un temps ; mais en exprimant, comme le fait Hertz, L en unités électromagnétiques et C en unités électrostatiques, L et C sont des longueurs, $\sqrt{LC}$ sera aussi une longueur, et par suite, pour obtenir la période, il faudra employer la formule :

$$T = 2\pi A \sqrt{LC}.$$

D'ailleurs, a longueur d'onde λ est donnée par :

$$\lambda = VT,$$

où V désigne la vitesse de propagation. Si on fait sur cette vitesse l'hypothèse qu'elle est l'inverse de A, on aura pour la longueur d'onde l'expression

$$\lambda = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Il vaut mieux considérer la période, ce qui ne préjuge rien sur la valeur de la vitesse de propagation.

Hertz emploie non pas la période complète, mais l'expression :

$$\pi \sqrt{LC}.$$

Il trouve que la longueur d'onde est d'environ 3 mètres, c'est-à-dire que, en admettant que la vitesse de propagation soit la même que celle de la lumière, le nombre des oscillations simples est de 100 millions par seconde.

34. Examen de quelques objections. — I. — Les deux boules du micromètre à étincelles sont reliées aux extrémités du fil induit de la bobine : on peut se demander si la capacité et la self-induction de la bobine n'ont pas une influence sur la période, de sorte que le calcul de cette période fait en ne tenant compte que de la capacité et de la self-induction de l'excitateur serait inexact ? Nous allons voir que non.

Nous avons à considérer deux courants : d'abord, un courant dont l'intensité est donnée par :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

circulant d'une sphère à l'autre, et en particulier d'une boule à l'autre du micromètre ; et, de plus, le courant de

décharge de la bobine, d'intensité i', qui ne parcourt que le micromètre.

Dans le micromètre, ces deux courants sont superposés et peuvent agir l'un sur l'autre : soit M leur coefficient d'induction mutuelle. M est beaucoup plus petit que le coefficient de self-induction L, car les deux courants n'ont qu'une très petite partie commune.

Notre équation devient alors :

$$L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Nous négligeons le terme Ri, parce que nous supposons la résistance très faible. Quant à i', il ne sera pas troublé par la présence de l'excitateur, car il est très considérable par rapport à i, et il conservera sa période propre, qui est la période de la bobine.

On peut donc poser :

$$- M \frac{di'}{dt} = A. \cos(\lambda t + h),$$

ce qui permet d'écrire l'équation précédente :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = A. \cos(\lambda t + h).$$

Nous obtenons ainsi une équation linéaire à second membre ; l'intégrale générale du premier membre est :

$$B_1 \cos \mu t + B_2 \sin \mu t,$$

ou :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

L'intégrale générale de notre équation est donc :

$$q = B_1 \cos \mu t + B_2 \sin \mu t + \frac{A. \cos(\lambda t + h)}{\frac{1}{C} - \lambda^2 L}.$$

Ce dernier terme est petit, puisqu'il renferme le coefficient très petit A ; de plus, il est sensiblement constant par rapport aux deux termes qui le précèdent, car la période propre de la bobine est beaucoup plus longue que celle de l'excitateur, ce qui revient à dire que λt varie beaucoup plus lentement que μt.

Ainsi la période de l'excitateur ne sera que peu influencée par celle de la bobine, la solution de l'équation précédente ayant une période oscillant très lentement autour d'une valeur moyenne.

II. — En établissant la formule de Thomson, nous avons fait quelques hypothèses : nous avons supposé que le courant circulait d'un bout du fil à l'autre avec la même intensité, ce qui revient à négliger la capacité du fil. Ceci n'est pas toujours permis, comme nous allons nous en rendre compte en examinant un cas extrême.

Considérons un excitateur formé par un fil métallique fin. Si le fil est indéfini, toutes les théories, et en particulier celle de Maxwell, s'accordent pour montrer qu'une perturbation s'y propagera avec une vitesse constante ; cette vitesse est d'ailleurs celle de la lumière. Dans le cas d'une oscillation périodique, on pourra donc représenter l'intensité du courant en un point par l'expression :

$$i = A. \sin \mu(z - Vt).$$

Supposons que le fil ait une extrémité : il s'y produira une réflexion donnant lieu à un courant réfléchi d'intensité :

$$i' = \text{A} \sin \mu(z + \text{V}t)$$

et l'intensité du courant total en un point sera donnée par :

$$\text{I} = i + i' = 2\text{A}. \sin \mu z. \cos. \mu \text{V}t.$$

On obtient ainsi ce qu'on appelle des ondes stationnaires, dont l'amplitude est proportionnelle à $\sin \mu z$ en un point d'abscisse z.

Cette amplitude est nulle aux points pour lesquels :

$$\sin \mu z = 0,$$

c'est-à-dire quand :

$$\mu z = \text{K}\pi,$$

K étant un nombre entier quelconque. En particulier, le courant est nul aux points $z = 0$ et $z = \frac{\pi}{\mu}$: on peut couper le fil en ces deux points sans rien changer à l'état du courant ; le tronçon ainsi obtenu constitue un excitateur dans lequel le mouvement oscillatoire de l'électricité est toujours représenté par :

$$\text{I} = 2\text{A}. \sin \mu z. \cos \mu \text{V}t.$$

Ainsi, dans ce cas particulier, la longueur du segment de fil est égale à la moitié de la longueur d'onde du mouvement périodique, et ce résultat est indépendant du diamètre du fil, tandis que dans la formule de Thomson intervient l'expression de la self-induction, où entre ce diamètre.

On voit donc qu'il est certains cas où la formule de Thomson ne peut être appliquée rigoureusement.

J.-J. Thomson a cherché l'influence de cette cause d'erreur, qui revient à supposer le courant constant dans tout le fil, alors qu'il ne l'est pas. On peut comme première approximation admettre la formule précédente, donnant l'intensité du courant ; celle-ci est alors représentée par une sinusoïde qui coupe le prolongement du fil aux points A et B (*fig.* 7) ;

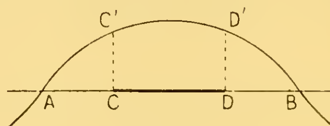


Fig. 7.

la partie utile CD, qui représente la longueur du fil, est notablement plus petite que AB. J.-J. Thomson a calculé le coefficient de self-induction en tenant compte de la variation d'intensité, et a trouvé que cette cause d'erreur était au plus de 2 à 3 centièmes, c'est-à-dire peu considérable : cela tient à ce que le maximum de la courbe est au milieu de CD, de sorte que la variation d'intensité le long de CD est relativement faible.

III. — En calculant la capacité, nous avons supposé la charge électrique répartie sur les sphères comme elle le serait à l'état d'équilibre, c'est-à-dire uniformément. Cela a-t-il lieu dans le cas present, où l'électricité est en mouvement ?

En faisant le calcul, on verrait que la différence est faible. Nous le ferons pour l'excitateur de M. Blondlot.

IV. — Si la théorie de Maxwell est vraie, il nous faut tenir

compte des courants de déplacement, qui circulent dans les diélectriques quand ceux-ci se trouvent dans un champ variable. Le cycle des courants se trouverait pour ainsi dire fermé à travers le diélectrique.

Pour mieux comprendre l'influence des courants de déplacement, reportons-nous aux anciennes théories, desquelles dépend en somme la formule de Thomson. D'après elles, toute l'énergie dépensée se retrouve en chaleur et dans l'expression de cette quantité de chaleur entre en facteur la résistance. Si cette résistance n'est pas négligeable, les oscillations doivent donc s'affaiblir ; si on la suppose au contraire négligeable, les oscillations doivent continuer indéfiniment avec la même amplitude.

En acceptant les idées de Maxwell, on doit considérer l'excitateur comme un centre de radiation d'énergie. Alors l'énergie dépensée se retrouve : 1° en chaleur ; 2° en énergie rayonnée. Alors même que la résistance serait négligeable, l'énergie ne s'en dissiperait pas moins et l'amplitude des oscillations irait en diminuant.

Ainsi, la considération des courants de déplacement introduit un changement assez considérable, dont il est difficile de tenir compte.

Nous pouvons nous demander si, avec ces différentes causes d'erreur, le calcul de Hertz est exact : nous verrons qu'en somme l'expérience lui donne à peu près raison.

35. Étude de l'appareil de M. Blondlot. — M. Blondlot a imaginé un appareil avec lequel on n'a plus à tenir compte des causes d'erreur précédentes.

C'est un condensateur (*fig.* 8) dans lequel la capacité élec-

trostatique est notablement plus grande que la longueur du fil. L'objection provenant de ce qu'on néglige la capacité du fil n'a plus alors sa raison d'être ; la longueur CDEFAB, qui joue le rôle de la partie CD dans la figure 7, est très petite par rapport à la longueur d'onde et la variation de l'intensité du courant le long du fil est très faible.

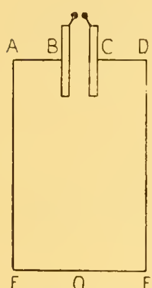


Fig. 8.

L'influence des courants de déplacement est également négligeable. En effet, il n'y a un champ électrique sensible qu'entre les deux armatures du condensateur, et c'est là seulement que se produisent les courants de déplacement ; ils sont excessivement courts, puisque l'intervalle qui sépare les deux plateaux n'est que d'une fraction de millimètre et ne peuvent avoir une influence sensible.

La principale correction à apporter dans le calcul de la période propre de l'appareil a trait à l'estimation de la capacité. Nous allons nous en occuper maintenant.

Cette capacité est mesurée par M. Blondlot à l'aide de la méthode de Maxwell ; mais on peut se demander si la capacité à l'état statique, telle qu'elle est mesurée par cette méthode, est égale à la capacité dans le cas d'oscillations très rapides. C'est ce qu'il nous reste à examiner.

Calcul de la capacité. — Les lignes de force dans le condensateur employé par M. Blondlot sont sensiblement perpendiculaires aux deux plateaux : ceux-ci sont, en effet, très rapprochés. On peut donc, en prenant comme axe des z une perpendiculaire aux plateaux, considérer les composantes X et Y comme nulles et étudier seulement la variation de Z.

On peut supposer $\mu = 1$, puisqu'il s'agit de points situés

dans l'air. Les trois premières équations du paragraphe 23 deviennent alors :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} \\ & A \frac{dM}{dt} = - \frac{dZ}{dx} \\ & A \frac{dN}{dt} = 0 \end{aligned} \right.$$

La première des trois autres équations fondamentales :

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u$$

se réduit à :

$$\frac{dM}{dz} = 0,$$

puisque X est nulle, que $\frac{dN}{dy}$ est nul d'après la dernière des équations (1), et que le courant (uvw) est nul dans un diélectrique.

De même, la deuxième équation du même groupe donne :

$$\frac{dL}{dz} = 0.$$

Quant à la troisième, elle devient :

$$A. \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}.$$

En différenciant cette équation par rapport à t, elle devient :

$$(2) \qquad A \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{d^2L}{dy.dt} - \frac{d^2M}{dx.dt}.$$

D'ailleurs, en différentiant les deux premières des équa-

tions (1), respectivement par rapport à y et à x, on obtient :

$$A \frac{d^2L}{dt.dy} = \frac{d^2Z}{dy^2}$$

$$A \frac{d^2M}{dt.dx} = - \frac{d^2Z}{dx^2},$$

et, en portant ces expressions dans l'équation (2), celle-ci devient :

$$A^2 \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2}. \tag{3}$$

Cette équation nous montre que Z ne peut pas être constant sur toute la surface, car le second membre serait nul et il en serait par suite de même du premier, ce qui ne peut avoir lieu. La différence est-elle bien grande ? Nous allons chercher à nous en rendre compte.

Nous avons pris comme axe des Z l'axe de symétrie du condensateur ; par symétrie, Z ne sera une fonction que de la distance à cet axe, c'est-à-dire de ρ seulement, en posant :

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Le second membre de l'équation (3) se transforme facilement en :

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{d\rho}.$$

Pour transformer le premier membre, remarquons que, d'après ce que nous avons vu sur la périodicité des oscillations, nous pouvons écrire :

$$Z = f(xyz) . \cos 2\pi \frac{t}{\tau} + \varphi(xyz) . \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot Z.$$

Le premier membre de l'équation (3) peut donc s'écrire :

$$-A^2 \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot Z$$

ou, en posant $\frac{1}{\lambda} = \frac{A}{\tau}$, expression dans laquelle λ représente la longueur d'onde :

$$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} Z.$$

L'équation (3) devient ainsi :

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} Z = 0.$$

Cette équation a pour solution la fonction de Bessel, qui est de la forme :

$$Z = B_0 + B_1\rho^2 + B_2\rho^4 + \ldots..$$

La courbe ainsi définie a la forme représentée dans la

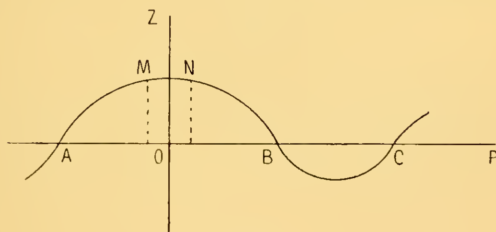


Fig. 9.

figure 9, les valeurs de ρ étant portées en abscisses et celles

de Z en ordonnées. La longueur BC est égale environ à $\frac{\lambda}{2}$, AB à $\frac{3.\lambda}{4}$.

Or, dans les expériences de M. Blondlot, λ avait pour valeur environ 10 mètres, tandis que le diamètre du plateau était inférieur à 30 centimètres : on voit donc que, dans la partie utile de la courbe, MN, la variation est très faible ; Z varie extrêmement peu et la capacité n'est pas beaucoup modifiée.

Remarque. — En électrostatique, la capacité d'un condensateur est le rapport qui existe entre la charge d'une des armatures et la différence de potentiel des deux armatures. Pour calculer cette différence de potentiel, nous devons ici multiplier Z par la distance des deux armatures ; mais, comme Z n'est pas constant, nous ne pouvons définir ainsi la capacité du condensateur.

Mais, en désignant par q la charge, V la différence de potentiel, C la capacité, on a :

$$C = \frac{q}{V}$$

et l'expression $\frac{q.V}{2}$ de l'énergie électrostatique E peut s'écrire :

$$E = \frac{q^2}{2C}.$$

On peut donc définir C par l'expression $C = \frac{q^2}{2E}$ et cette définition ne suppose plus le potentiel constant sur les armatures.

36. Il nous reste maintenant à indiquer comment on peut calculer la self-induction dans l'appareil de M. Blondlot.

Auparavant, nous allons démontrer quelques propositions dont nous aurons besoin.

I. — *Le flux de force magnétique qui traverse un circuit fermé constitué par un conducteur parfait est constant.*

En effet, soit φ ce flux, et F la force électromotrice d'induction qui règne dans le circuit. On a d'une part :

$$F = \frac{d\varphi}{dt}$$

et d'ailleurs, d'après la loi de Ohm :

$$F = Ri.$$

Mais le circuit étant supposé parfaitement conducteur, R est nul. Donc :

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

ce qui montre que le flux est constant.

II. — *La force magnétique est constamment nulle à l'intérieur d'un conducteur parfait.*

Imaginons maintenant un conducteur à trois dimensions, formé d'une substance que nous supposerons parfaitement conductrice. Le flux magnétique qui traverse un petit circuit fermé taillé dans le conducteur est constant (c'est le flux de force magnétique ou ce flux multiplié par μ suivant que le conducteur n'est pas ou est magnétique).

Si on part du repos, le flux de force magnétique part de *o*, et, comme il est constant, il reste nul. Or, le flux qui traverse un circuit infiniment petit entourant une surface d'étendue $d\omega$ est égal à $d\omega$ multiplié par la composante de la force magnétique normale à l'élément.

Cette composante est donc nulle, et, comme le circuit peut être orienté d'une façon quelconque, une composante quel-

conque de la force magnétique est nulle, ce qui revient à dire que la force magnétique elle-même est nulle, en un point quelconque du conducteur.

CONSÉQUENCES. — 1° *Le courant est constamment nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.*

En effet, le travail effectué par la force magnétique appliquée à un pôle qui parcourt un circuit fermé est égal à 4π multiplié par l'intensité du courant qui traverse ce circuit. Ici, la force étant nulle, le travail est nul, et par suite le courant est nul.

2° *La force magnétique à la surface d'un conducteur parfait est tangente à la surface.*

On peut, en effet, répéter le raisonnement fait plus haut, dans le cas d'un point pris à la surface : mais la seule orientation qu'on puisse donner au petit élément $d\omega$ est la surface même, de sorte qu'on démontre seulement que la composante de la force magnétique normale à la surface est nulle. Cette force est donc tangente à la surface.

Ces démonstrations avaient été données par Maxwell, mais elles parurent d'abord être une pure spéculation, puisqu'on ne peut réaliser un conducteur parfait; nous allons voir maintenant que ces résultats s'appliquent sensiblement à des conducteurs quelconques, dans le cas d'oscillations très rapides.

III. — *Dans le cas d'oscillations très rapides, les résultats précédents sont sensiblement applicables aux conducteurs quelconques.*

Supposons un circuit quelconque, de résistance R. On a toujours :

$$F = \frac{d\varphi}{dt} = Ri.$$

R a une valeur finie ; il en est de même de i ; autrement il y aurait rapide dissipation de l'énergie par la chaleur de Joule. Donc, $\frac{d\varphi}{dt}$ est également fini.

D'ailleurs, le flux φ, dans le cas d'oscillations, est de la forme :

$$\varphi = e^{\gamma t}.\left[B.\cos\frac{2\pi t}{\tau} + C\sin\frac{2\pi t}{\tau}\right].$$

Le facteur exponentiel provient de ce qu'il y a de l'énergie dissipée. φ se compose ainsi de deux termes :

$e^{\gamma t}.B.\cos\frac{2\pi t}{\tau}$, qui est la partie réelle de $B.e^{t\left(\gamma + i\frac{2\pi}{\tau}\right)}$

$l^{\gamma t}.C.\sin\frac{2\pi t}{\tau}$, » » $-Cie^{t\left(\gamma + i\frac{2\pi}{\tau}\right)}$.

φ est ainsi la partie réelle de l'imaginaire :

$$(B - iC).\, e^{pt}$$

en posant :

$$p = \gamma + i\frac{2\pi}{\tau}.$$

Alors $\frac{d\varphi}{dt}$ sera la partie réelle de :

$$(B - iC).\, p.e^{pt}.$$

Si on suppose les oscillations très rapides, τ est très petit et par suite le module de p est très grand ; pour que $\frac{d\varphi}{dt}$ reste fini, il faut donc que φ soit très petit, sensiblement nul. Or c'est de ce fait que nous avons déduit tous les résultats précédents : ils sont donc encore vrais ici.

IV. — *La force électrique est nulle à l'intérieur d'un con-*

ducteur parfait ou à l'intérieur d'un conducteur quelconque dans le cas d'oscillations rapides.

Cela résulte des équations de la forme :

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

D'après ce qu'on vient de voir, le second membre est nul. Donc X, Y, Z doivent être constantes et, par suite, nulles, puisqu'elles sont nulles au repos, d'où l'on peut partir.

V. — A la *surface d'un conducteur parfait la force électrique est normale au conducteur.*

Nous supposerons une couche de passage entre le conducteur et le diélectrique, d'épaisseur infiniment petite h. Nous prendrons pour axe des z une normale à la surface : la couche de passage pourra ainsi être considérée comme limitée par deux plans parallèles au plan xoy.

Nous allons nous servir des équations de la forme :

$$A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}.$$

Le premier terme est fini, c'est-à-dire qu'il n'est ni de l'ordre de $\frac{1}{h}$ ou d'un ordre supérieur, auquel cas il serait infiniment grand, ni de l'ordre de h ou d'un ordre inférieur, auquel cas il serait infiniment petit.

Le terme $\frac{dZ}{dy}$ est également fini, car les variations rapides n'ont lieu qu'à travers la couche de passage et, en faisant varier y de dy, on ne traverse pas cette couche.

Par suite, le troisième terme $\frac{dY}{dz}$ est fini.

Si on appelle Y_1 et Y_2 les valeurs de Y de part et d'autre de la couche, on aura donc :

$$Y_1 = Y_2,$$

car la variation de Y, quand on traverse la couche, est :

$$h \times \frac{dY}{dz},$$

c'est-à-dire un infiniment petit. Comme à l'intérieur du conducteur la force électrique est nulle, on aura donc :

$$Y = 0$$

à la surface extérieure de la couche de passage. On verrait de même que :

$$X = 0.$$

La composante normale seule est différente de o, ce qui montre que la force électrique est normale au conducteur.

Remarque. — On pourrait se demander pourquoi le même raisonnement n'est pas applicable à la force magnétique, au moyen des équations de la forme :

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

Les termes $A\varepsilon \frac{dX}{dt}$ et $\frac{dN}{dy}$ sont bien finis, mais il n'en résulte pas que $\frac{dM}{dz}$ le soit, à cause de la présence du terme $4\pi A u$; les composantes du courant doivent être, en effet, infiniment grandes, puisque le courant qui est fini est localisé dans une couche infiniment mince ; on ne peut donc pas dire que le terme en u est fini et notre raisonnement n'est plus applicable.

VI. — *En un point voisin du conducteur la force magnétique est perpendiculaire au courant superficiel et proportionnelle à sa densité superficielle.*

Les composantes uvw du courant sont infinies en un point de la surface du conducteur ; mais le courant est fini si on le considère pour une surface et non plus pour un volume. Soit $d\lambda$ un élément linéaire de la surface du conducteur.

L'expression

$$\alpha . d\lambda . dt$$

représente la quantité d'électricité qui le traverse pendant le temps dt, α représentant la composante superficielle du courant perpendiculairement à l'élément considéré.

On pourra définir la densité superficielle du courant au moyen des composantes superficielles relatives à deux directions rectangulaires.

Nous prenons toujours comme axe des z la normale à la surface. Nous désignerons par L_1 M_1 N_1 les composantes de la force magnétique en un point du diélectrique très voisin de la couche de séparation, et par L_2 M_2 N_2 celles de la force en un point également très voisin de cette couche, mais situé dans le conducteur.

Nous avons des équations de la forme :

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

u est infiniment grand parce que le courant, fini, est répart dans une couche très mince, mais les composantes superficielles sont finies. Ce sont :

$$\int u . dz \qquad \int v . dz \qquad o,$$

l'intégration étant étendue à toute l'épaisseur de la couche de passage.

Intégrons les deux membres de l'équation précédente :

$$\int A\varepsilon \frac{dX}{dt} dz = \int \frac{dM}{dt} dz - \int \frac{dN}{dy} dz - 4\pi A \int u dz.$$

L'intégrale :

$$\int A\varepsilon \frac{dX}{dt} \cdot dz$$

est nulle, parce que la fonction soumise à l'intégration est finie, et que l'épaisseur à laquelle s'étend l'intégration est infiniment petite.

Il en est de même de l'intégrale :

$$\int \frac{dN}{dy} \cdot dz.$$

Il nous reste donc :

$$M_1 - M_2 = 4\pi A \int u.dz.$$

Comme la force est nulle à l'intérieur du conducteur, $M_2 = 0$. Il reste donc :

$$M_1 = 4\pi A \int udz$$

et on trouverait de même :

$$L_1 = -4\pi A \int v.dz.$$

Nous savons que N_1 est nulle.

Nous sommes donc arrivés à cette conclusion que, les composantes superficielles du courant étant :

$$\int u dz \qquad \int v dz \qquad 0,$$

les composantes de la force magnétique en un point voisin du conducteur sont :

$$-4\pi\Lambda\int v dz \qquad 4\pi\Lambda\int u dz \qquad 0.$$

Ces expressions démontrent le théorème énoncé.

VII. — *Le flux de force magnétique qui traverse une surface fermée comprise dans un diélectrique est nul.*

En effet, le flux total qui traverse cette surface est égal à la quantité de magnétisme libre contenue à l'intérieur de cette surface, multipliée par le facteur constant $\frac{1}{4\pi}$.

Or le milieu est supposé non magnétique et ne comprend pas d'aimant permanent : cette quantité de magnétisme libre est donc nulle, et il en est par suite de même du flux total.

On pourrait s'en rendre compte autrement : sur la surface fermée traçons un circuit fermé c qui divise la surface en deux parties, A et A′ ; la force électromotrice qui s'exerce dans le circuit est égale à la variation du flux magnétique à travers A ou à travers A′ : donc les variations du flux à travers A et A′ sont égales et de signes contraires ; si on part du repos, on voit que les flux à travers A et A′ sont égaux et de signes contraires, c'est-à-dire que le flux total est nul.

VIII. — *Les flux de force magnétique qui traversent deux*

circuits fermés tracés à la surface d'un conducteur remplissant les conditions précédemment indiquées sont égaux.

Supposons par exemple un conducteur annulaire, dont la section se composera de deux cercles (*fig.* 11). A sa surface traçons deux circuits fermés c et c' : c coupe le plan du tableau en AB, c' en A'B'. Par le circuit c faisons passer une aire AMB, et par c' une aire A'M'B'. Nous compléterons la surface fermée par la portion de la surface du conducteur comprise entre les deux courbes c et c'. D'après ce que nous venons de voir, comme la surface fermée est entièrement remplie par un diélectrique, le flux de force magnétique qui la traverse est nul ; mais le flux de force qui traverse la portion de la surface fermée formée par la surface du conducteur est nul, puisque la force est tangente au conducteur ; donc les flux de force traversant les aires AMB et A'M'B' sont égaux en valeur absolue.

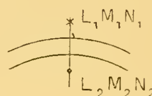


Fig. 10.

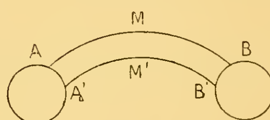


Fig. 11.

Le raisonnement que nous avons fait s'applique évidemment à un conducteur quelconque.

37. Calcul de la self-induction dans l'appareil de M. Blondlot. — Revenons maintenant à l'appareil de M. Blondlot et figurons par des flèches le chemin que suivent les courants ; ils contournent les plaques, en restant à la surface (*fig.* 12) ; dans la lame d'air qui sépare les plaques, ils suivent les lignes de force électrique.

Le calcul de la self-induction est facilité par la forme choi-

sic : dans l'excitateur de Hertz, on ignorait le chemin des courants de déplacement ; ici, au contraire, on sait comment le courant se trouve fermé, et on peut appliquer la formule de Neumann, que l'expérience montre être vraie pour les courants fermés.

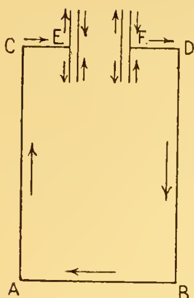


Fig. 12.

Voici comment M. Blondlot a calculé la self-induction : Supposons d'abord que nous ayons seulement affaire à un cadre rectangulaire.

On appliquera la formule de Neumann :

$$\int \frac{\cos \varepsilon . ds . ds'}{r}$$

La self-induction totale se compose de la self-induction de chacun des côtés et de l'induction mutuelle des côtés deux à deux.

L'induction mutuelle de AB et AC, ainsi que des couples analogues, est nulle, puisque dans la formule de Neumann $\cos \varepsilon$ est constamment nul.

Pour deux côtés opposés du rectangle, l'induction mutuelle est facile à calculer ; elle est négative, les courants dans ces deux côtés étant de sens opposés ; mais elle est très faible et peut être négligée : comme elle est négative, le résultat trouvé en appliquant la formule :

$$L = 2l \left[\log \frac{4l}{d} - 1 \right]$$

devrait être un peu trop fort ; mais cette erreur est compen-

sée par ce fait que M. Blondlot applique sa formule aux longueurs CE et DF du côté CD et néglige l'induction mutuelle de CE et DF.

En somme, cette méthode de calcul nous conduit presque au même résultat que si le fil ECABDE était déployé. En opérant ainsi, nous négligeons les courants qui se trouvent à la surface des deux plateaux ; on pourrait calculer cette erreur et voir qu'elle est négligeable. Mais on peut vérifier autrement l'exactitude du calcul ainsi conduit.

Le flux de force magnétique qui traverse le cadre est égal à :

$$Li,$$

L étant la self-induction du cadre ; nous savons que ce flux de force est le même pour tous les circuits tracés sur le conducteur ; il nous suffira de le calculer pour l'un d'eux, par exemple pour la section par le plan du tableau. En un point éloigné du conducteur, la force magnétique est relativement faible, à cause du facteur $\frac{1}{r}$ qui entre dans l'expression de la loi de Savart.

Près du condensateur, elle est faible également, puisqu'elle est proportionnelle à la densité superficielle, qui est peu considérable à cause de l'étendue du plateau.

En faisant le calcul du flux et en divisant par i le résultat trouvé, on doit obtenir L : on arrive bien sensiblement au même résultat que celui déduit par M. Blondlot de la formule de Thomson.

De tout ce qui précède, il résulte que le grand avantage de l'appareil de M. Blondlot est qu'on peut calculer beaucoup plus facilement que pour les appareils antérieurs la période propre.

CHAPITRE III

ÉTUDE THÉORIQUE DES OSCILLATIONS HERTZIENNES

38. Recherche des intégrales des équations générales. — Rappelons que nous avons trouvé deux groupes d'équations de la forme :

$$A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

Nous supposerons, dans ce qui suivra que les corps conducteurs sont placés dans le vide ou dans un diélectrique qu'on puisse assimiler au vide, l'air par exemple. Nous étudierons plus tard le cas de conducteurs plongés dans d'autres diélectriques.

Dans ces conditions, pour un point du diélectrique, les équations deviennent :

$$A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}.$$

Ce que nous cherchons, ce sont des intégrales ayant la forme :

$$X = Be^{\gamma t} \cos qt + Ce^{\gamma t} \sin qt.$$

Nous avons vu que cette expression est la partie réelle de l'imaginaire :

$$(B - iC).\, e^{ipt}$$

où l'on a posé :

$$p = \gamma + iq.$$

Nous allons employer un artifice fréquemment utile : si on trouve une solution imaginaire, n'ayant par elle-même aucun sens, en ne gardant que la partie réelle, on a une solution répondant à la réalité physique. En effet, les équations ont leurs coefficients réels ; on aura donc une nouvelle solution en remplaçant dans la première i par $-i$; mais, comme d'autre part les équations sont linéaires, si X_1, Y_1, Z_1, L_1,... et X'_1, Y'_1, Z'_1, L'_1,... sont deux groupes de solutions on aura encore des solutions en formant les expressions

$$X = \frac{X_1 + X'_1}{2}$$

$$Y = \frac{Y_1 + Y'_1}{2} \qquad \text{etc.}$$

et ces expressions ne sont pas autre chose que la partie réelle de X_1, Y_1, Z_1.

Cherchons donc des solutions de la forme :

$$(B - iC).e^{ipt}.$$

On voit que de cette forme des solutions il résulte que :

$$\frac{dX}{dt} = ipX$$

$$\frac{dL}{dt} = ipL \qquad \text{etc.}$$

Les équations pour un point du diélectrique deviennent donc :

$$AipL = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$AipX = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}.$$

Il s'agit de trouver six fonctions de x, y, z, X, Y, Z, L, M, N et un nombre p qui satisfassent à ces six équations. Le problème n'est pas déterminé ; il faut se donner les conditions limites qui sont ici les conditions à la surface.

Le vecteur X, Y, Z doit être normal à la surface des conducteurs.

Le problème est relativement simple [1] si on considère un diélectrique limité par une surface conductrice, car alors il ne peut y avoir de rayonnement à l'extérieur [2] et, par suite, γ est nul. Les fonctions que nous cherchons sont alors réelles aux facteurs e^{ipt} et ie^{ipt} près. Nous allons examiner un problème plus difficile, celui où l'on suppose le diélectrique indéfini.

39. Cas d'un diélectrique indéfini. — La simplification qui se produisait dans le cas précédent n'a plus lieu : il y a perte d'énergie par rayonnement.

Reprenons nos équations générales. Le coefficient μ est égal à 1 dans le diélectrique ; dans un conducteur, même magnétique, on pourra également le supposer égal à 1, parce que nous supposons qu'il n'y a pas de magnétisme dans le conducteur.

(1) Cf. *Electricité et Optique*, tome II, note 3.

(2) Ceci est, comme nous le verrons plus loin, une conséquence du théorème de Poynting.

Quant à ε, il est égal à 1 dans le diélectrique; dans le conducteur, nous ne connaissons pas sa valeur; mais on peut sans erreur sensible le prendre égal à 1, parce que ε ne figure que dans le terme $A\varepsilon \frac{dX}{dt}$, qui est toujours négligeable par rapport aux autres : en effet, dans le conducteur, X, Y, Z sont nulles; à la surface, u, v, w sont très grandes et le terme $A\varepsilon \frac{dX}{dt}$ est négligeable par rapport au terme $-4\pi A u$.

Ainsi nous pourrons donc dans tout l'espace supposer :

$$\varepsilon = \mu = 1$$

et écrire nos équations sous la forme :

$$A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

40. Introduction du potentiel vecteur ξ, η, ζ. — Nous allons poser :

$$(1) \quad \begin{cases} L = \dfrac{d\zeta}{dy} - \dfrac{d\eta}{dz} \\ M = \dfrac{d\xi}{dz} - \dfrac{d\zeta}{dx} \\ N = \dfrac{d\eta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dy} \end{cases}$$

Remarquons que ces équations ne suffisent pas pour déterminer ξ, η, ζ, car elles se réduisent en somme à deux à cause de la relation :

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0,$$

qui exprime que la densité du magnétisme est nulle.

Différentions les deux membres de la première des équations par rapport à t et multiplions en même temps par A. Il vient :

$$A \frac{dL}{dt} = A \left(\frac{d^2\zeta}{dy.dt} - \frac{d^2\eta}{dz.dt} \right).$$

En comparant à la première des équations fondamentales, on voit que :

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = A \left(\frac{d^2\zeta}{dy.dt} - \frac{d^2\eta}{dz.dt} \right),$$

ce qu'on peut écrire :

$$\frac{d.}{dy} \left(Z - A \frac{d\zeta}{dt} \right) = \frac{d.}{dz} \left(Y - A \frac{d\eta}{dt} \right).$$

On trouverait de même deux équations analogues et il résulte de là que l'expression :

$$\left(X - A \frac{d\xi}{dt} \right) dx + \left(Y - A \frac{d\eta}{dt} \right) dy + \left(Z - A \frac{d\zeta}{dt} \right) dz = d\varphi$$

est une différentielle totale exacte que nous désignerons par $d\varphi$. On a alors :

$$X = A \frac{d\xi}{dt} + \frac{d\varphi}{dx}$$

$$Y = A \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\varphi}{dy}$$

$$Z = A \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\varphi}{dz}$$

Remplaçons dans les équations générales L, M, N par

leurs valeurs. La première devient :

$$A \frac{dX}{dt} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right) - 4\pi A u.$$

Posons :

$$\Delta\xi = \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}$$

et :

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

L'équation précédente peut s'écrire :

$$A \frac{dX}{dt} = \Delta\xi - \frac{d\theta}{dx} - 4\pi A u.$$

En remplaçant X par sa valeur, on obtient :

$$A^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} + A \frac{d^2\varphi}{dt.dx} = \Delta\xi - \frac{d\theta}{dx} - 4\pi A u.$$

On aurait de même deux équations analogues.

On peut satisfaire d'une infinité de façons à ce système d'équations. En particulier, on peut définir φ en posant :

$$\theta = - A \frac{d\varphi}{dt}$$

et l'équation précédente devient :

$$A^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Delta\xi - 4\pi A u.$$

Cette équation ne contient plus que ξ et u ; c'est elle qu'il nous faut intégrer.

Supposons d'abord que le premier terme n'existe pas et

que l'équation se réduise à :

$$\Delta\xi = 4\pi A u.$$

L'intégrale de cette équation est un potentiel d'une matière attirante fictive de densité Au. Considérons un point xyz et un autre $x'y'z'$ où cette matière fictive ait la densité Au : dans un élément de volume $d\tau'$ situé autour du point $x'y'z'$ se trouve une quantité de matière fictive égale à :

$$Au'.d\tau'$$

et on aurait :

$$\xi = -A\int\frac{u'.d\tau'}{r}.$$

ξ, η, ζ seraient alors un facteur constant Après le potentiel vecteur de Maxwell.

Mais notre équation n'a pas la forme simple que nous avons supposée. Soit :

$$u = f(x, y, z, t).$$

Alors on écrira :

$$u' = f(x', y', z', t).$$

Désignons par r la distance des deux points xyz, $x'y'z'$, et introduisons la fonction :

$$u'' = f(x', y', z', t - rA)$$

A l'instant t, u est la valeur de la composante parallèle à ox du courant au point xyz ; u' est la valeur de cette composante au même moment au point $x'y'z'$; quant à u'', c'est la valeur du courant au point $x'y'z'$, mais à une époque anté-

rieure d'un temps rA au temps t ; cet intervalle rA est le temps que met la lumière à aller du point xyz au point $x'y'z'$.

Nous allons démontrer que la fonction :

$$\xi = -\mathrm{A}\int \frac{u''.d\tau'}{r}$$

satisfait à notre équation.

En effet, considérons l'expression :

$$\xi_1 = -\mathrm{A}\int \frac{u'.d\tau'}{r},$$

elle satisfait à la relation :

$$\Delta\xi_1 = 4\pi \mathrm{A} u.$$

Si nous voulions calculer $\Delta\xi$, nous serions arrêtés dans la différentiation sous le signe $\int$ par ce fait que l'expression comprise sous le signe $\int$ devient infinie quand le point $x'y'z'$ se rapproche indéfiniment de xyz, puisqu'alors r tend vers o, sans qu'il en soit de même de u''.

Mais si nous formons :

$$\xi - \xi_1 = -\mathrm{A}\int \frac{u'' - u'}{r}\, d\tau',$$

nous pourrons différentier sous le signe $\int$, car $u'' - u'$ devient nul lorsque $x'y'z'$ se rapproche de xyz, puisque cette différence est :

$$f(t - r\mathrm{A}) - f(t),$$

qui tend vers o quand r diminue indéfiniment.

$\frac{u'' - u'}{r}$ n'augmente donc plus indéfiniment et on a le droit d'écrire :

$$\Delta\xi - \Delta\xi_1 = -\mathrm{A}\int \Delta . \frac{u'' - u'}{r} \cdot d\tau'.$$

Mais u' ne dépend pas de r ; donc on a :

$$\Delta . \frac{u'}{r} = u'\Delta \frac{1}{r} = 0.$$

D'ailleurs, on a :

$$\Delta . \frac{u''}{r} = \Delta . \frac{f(t - r\mathrm{A})}{r} = \frac{\mathrm{A}^2}{r} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{r} \frac{d^2 u''}{dt^2}.$$

En remplaçant $\Delta \frac{u''}{r}$ par sa valeur dans l'équation précédente, elle devient :

$$\Delta\xi - \Delta\xi_1 = -\mathrm{A}^3 \int \frac{d^2 u''}{dt^2} \cdot \frac{d\tau'}{r}. \qquad (2)$$

D'autre part, de :

$$\xi = -\mathrm{A}\int \frac{u''.d\tau''}{r}$$

on tire :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\mathrm{A}\int \frac{d^2 u'}{dt^2} \cdot \frac{d\tau'}{r}. \qquad (3)$$

La comparaison des équations (2) et (3) donne :

$$\Delta\xi - \Delta\xi_1 = \mathrm{A}^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Mais comme :

$$\Delta\xi_1 = 4\pi A u,$$

on voit que :

$$A^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Delta\xi - 4\pi A u,$$

ce qui prouve que nous avons bien obtenu une solution du problème. Il nous resterait à démontrer que, en partant du repos, cette solution est unique. Nous ne le ferons pas : on trouvera la démonstration dans le tome II de la *Théorie mathématique de la lumière.*

Nous obtenons ainsi ξ, η, ζ en fonction de u, v, w, et par suite X, Y, Z, L, M, N également en fonction de u, v, w. Le problème serait donc entièrement résolu si l'on connaissait u, v, w. Or dans la plupart des cas, par exemple dans le cas du résonateur de M. Blondlot, il est plus facile de se faire une idée approximative des variations de u, v, w que de celles des autres quantités.

41 Notations de Maxwell. — Maxwell pose :

$$L = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

$$M = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}$$

$$N = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}$$

il suppose que :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0$$

Il trouve que la composante F du potentiel vecteur FGH serait le potentiel dû à une matière attirante fictive dont la

densité serait u, en tenant compte à la fois des courants de conduction et des courants de déplacement, dans l'expression de u.

Le potentiel vecteur F, G, H de Maxwell n'est pas le même que celui que nous venons de définir.

Pour Maxwell F est égal à un potentiel qui serait dû à une matière attirante fictive de densité u : il en est de même de ξ ; mais il y a deux différences.

Pour le calcul de F, Maxwell tient compte des courants de conduction et de ceux de déplacement et il suppose que l'attraction a lieu suivant la loi de Newton, c'est-à-dire instantanément. Dans le calcul de ξ, au contraire, nous n'avons tenu compte que des courants de conduction et nous avons supposé que l'attraction se propageait avec la vitesse de la lumière.

42. Usage du potentiel vecteur. — Supposons un circuit fermé quelconque ; construisons en un point d'un élément ds le vecteur ayant pour composantes :

$$\frac{dF}{dt} \qquad \frac{dG}{dt} \qquad \frac{dH}{dt},$$

multiplions la projection de ce vecteur sur l'élément par la longueur de l'élément, et nous aurons la force électromotrice qui s'exerce sur l'élément ds. En intégrant, nous pourrons obtenir la force électromotrice totale qui s'exerce dans le circuit.

On pourrait remplacer dans ce calcul le potentiel F, G, H par le potentiel ξ, η, ζ.

Remarque. — La formule qui donne la force électromo-

trice d'induction pour un élément ds due à un élément ds' est :

$$\frac{di}{dt}\,\frac{dS.dS'.\cos\varepsilon}{r}$$

Si nous admettons que la vitesse d'induction est la vitesse de la lumière, nous devrons dans cette expression remplacer i par la valeur de l'intensité du courant à une époque antérieure d'un temps égal à celui que la lumière mettrait à parcourir la distance des deux éléments.

Il est indifférent de faire cette hypothèse et de ne tenir compte que de l'induction due aux courants de conduction, ou bien de conserver, comme Maxwell, l'ancienne loi de l'induction et de tenir compte à la fois des courants de conduction et de ceux de déplacement.

43. Différentes manières de poser le problème. — Pour que la solution obtenue soit acceptable, il faut que la force magnétique soit nulle à l'intérieur des conducteurs, ou que l'expression :

$$\xi.dx + \eta dy + \zeta dz$$

soit une différentielle totale exacte, ou, ce qui revient au même, que la force électrique soit normale à la surface des conducteurs.

Nous pouvons donc poser le problème de trois façons, de même qu'un problème de distribution électrique en électrostatique peut être envisagé de trois manières.

On peut se proposer en électrostatique :

1° De trouver une fonction V qui soit constante à l'intérieur des conducteurs ;

2° De chercher une distribution à la surface telle que la force électrique soit nulle à l'intérieur des conducteurs ;

3° De chercher une distribution telle que la force électrique en un point de la surface d'un conducteur soit normale à cette surface.

De même ici nous aurons trois façons de poser la question :

1° Chercher des fonctions X, Y, Z, L, M, N, satisfaisant aux équations de Hertz dans le diélectrique, avec la condition limite pour la force électrique d'être normale à la surface. Une fois ces fonctions connues, on en déduira u, v, w ;

2° Chercher à déterminer ξ, η, ζ, en sorte que l'expression :

$$\xi dz + \eta dy + \zeta dz$$

soit à l'intérieur des conducteurs une différentielle totale exacte.

De là on déduira L, M, N, puis u, v, w et X, Y, Z ;

3° Chercher à déterminer u, v, w, en sorte que la force électrique soit normale à la surface des conducteurs en tous les points de la surface.

44. Autres solutions de nos équations. — Nous avons trouvé une solution de nos équations :

$$\xi = - A \int \frac{u''.d\tau'}{r}$$

$$\eta = - A \int \frac{v''.d\tau'}{r}$$

$$\zeta = - A \int \frac{w''.d\tau'}{r}.$$

Cette solution n'est évidemment pas unique, car si nous posons :

$$\xi' = \xi - \frac{dS}{dx}$$

$$\eta' = \eta - \frac{dS}{dy}$$

$$\zeta' = \zeta - \frac{dS}{dz}$$

en désignant par S une fonction quelconque de x, y, z, t, nous avons encore là une solution de nos équations. En effet, les relations de la forme :

$$L = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}$$

sont satisfaites par ξ', η', ζ' si elles le sont par ξ, η, ζ, puisque l'on a :

$$\frac{d^2S}{dy.dz} = \frac{d^2S}{dz.dy}.$$

Parmi ces solutions, il y en a quelques-unes qui présentent une forme remarquable.

I. — Rappelons que nous avions :

$$X = A\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\varphi}{dx}.$$

Si nous posons :

$$\xi' = \int \frac{X.dt}{A}$$

$$\eta' = \int \frac{Ydt}{A}$$

$$\zeta' = \int \frac{Z.dt}{A}$$

$$S = -\frac{1}{A}\int \varphi.dt,$$

nous aurons une nouvelle solution. En effet, en intégrant les deux membres de la première équation et en divisant par A, nous obtenons :

$$\frac{1}{A}\int X dt = \xi + \frac{1}{A}\int \frac{d\varphi}{dx}\, dt.$$

Mais la valeur précédente de S donne :

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{A}\int \frac{d\varphi}{dx}\, dt.$$

En remplaçant dans la dernière équation, on a bien :

$$\xi' = \xi - \frac{dS}{dx}.$$

II. — Une autre solution remarquable est le potentiel vecteur de Maxwell,

$$\xi' = -A\int \frac{u'.d\tau'}{r}.$$

u' étant l'intensité du courant au temps t au point $x'y'z'$; on tient compte alors des courants de déplacement.

III. — *Cas où l'excitateur est de révolution.* — Alors le champ est également de révolution ; les lignes de force électriques et magnétiques devront par raison de symétrie être situées dans les méridiens ou prendre la forme de parallèles. Puisque la force magnétique doit être tangente au conducteur et la force électrique lui être normale, les lignes de force magnétiques seront des parallèles, et les lignes de force électrique seront dans les méridiens.

Il résulte de là que :

$$N = 0$$

ou :

$$\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{d\eta} = 0$$

cette équation montre que l'expression :

$$\xi . dx + \eta . dy$$

est une différentielle totale exacte, quand on regarde z et t comme des constantes. On peut donc poser :

$$\xi = \frac{dS}{dx} \qquad \eta = \frac{dS}{dy}.$$

Rappelons que nous avons obtenu des équations de la forme :

$$A^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Delta\xi - 4\pi A u.$$

Dans le diélectrique, u est nul et il reste :

$$A^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Delta\xi.$$

Nous avons donc, pour déterminer S, les équations :

$$\frac{d.}{dx}\left(A^2 \frac{d^2S}{dt^2} - \Delta S\right) = 0$$

$$\frac{d.}{dy}\left(A^2 \frac{d^2S}{dt^2} - \Delta S\right) = 0$$

montrant que S n'est déterminé qu'à une fonction arbitraire près de z et de t. Disposons de cette fonction arbitraire, de

telle sorte que :

$$A^2 \frac{d^2S}{dt^2} - \Delta S = 0.$$

Dans ce cas ξ' et η' sont nuls, puisque ξ et η sont égaux respectivement à $\frac{dS}{dx}$ et $\frac{dS}{dy}$.

Rappelons que nous avons posé :

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

et :

$$X = A \frac{d\xi}{dt} + \frac{d\varphi}{dx}.$$

Dans le cas présent, posons de même

$$\theta' = \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{d\eta} + \frac{d\zeta'}{dz}$$

en remarquant que θ' se réduit en somme à $\frac{d\zeta'}{dz}$ et :

$$X = A \frac{d\xi'}{dt} + \frac{d\varphi'}{dx}.$$

En remplaçant dans les équations d'où nous sommes partis, nous trouvons :

$$A^2 \frac{d^2\xi'}{dt^2} + A \frac{d^2\varphi'}{dxdt} = \Delta\xi' - \frac{d\theta'}{dx} - 4\pi A u.$$

Le terme en u est nul, puisque nous supposons le point considéré placé dans le diélectrique. De plus, ξ' satisfait à l'équation :

$$A^2 \frac{d^2\xi'}{dt^2} = \Delta\xi'$$

à cause de la façon dont nous avons déterminé S. Il reste donc :

$$A \frac{d^2\varphi'}{dx.dt} = -\frac{d\theta'}{dx}.$$

On obtiendrait de même les deux relations :

$$A \frac{d^2\varphi'}{dy.dt} = -\frac{d\theta'}{dy}$$
$$A \frac{d^2\varphi'}{dz.dt} = -\frac{d\theta'}{dz}.$$

On peut satisfaire à ce groupe d'équations par :

$$A \frac{d\varphi'}{dt} = -\theta' = -\frac{d\zeta'}{dz}.$$

Remarquons que la solution que nous avons ainsi obtenue est particulièrement simple, puisque le vecteur ξ', η', ζ' est constamment parallèle à oz, l'axe de révolution.

45. Application à l'excitateur sphérique de Lodge. — Supposons une sphère conductrice placée dans un champ uniforme ; une fois l'équilibre atteint, nous supprimons brusquement le champ : les électricités séparées se recombinent en effectuant des oscillations ; on a ainsi constitué un excitateur qui est de révolution et auquel on peut appliquer les équations précédentes.

Nous allons introduire une fonction auxiliaire π et poser :

$$A \frac{d\pi}{dt} = -\zeta'.$$

De cette relation et de :

$$A \frac{d\varphi'}{dt} = -\frac{d\zeta'}{dz}$$

on déduit :

$$\varphi' = \frac{d\pi}{dz}.$$

Mais nous avons d'autre part :

$$X = A\frac{d\xi'}{dt} + \frac{d\varphi'}{dn}$$

$$Y = A\frac{d\eta'}{dt} + \frac{d\varphi'}{dy}$$

$$Z = A\frac{d\zeta'}{dt} + \frac{d\varphi'}{dz}$$

expressions que nous allons transformer en y remplaçant ξ', η', ζ' et φ' par leurs valeurs, qui sont :

$$\xi' = 0 \qquad \eta' = 0 \qquad \zeta' = -A\frac{d\pi}{dt}$$

$$\varphi' = \frac{d\pi}{dz}$$

Nous obtenons :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{d^2\pi}{dx.dz} \\ Y &= \frac{d''\pi}{dy.dz} \\ Z &= -A^2\frac{d^2\pi}{dt^2} + \frac{d^2\pi}{dz^2} \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs nous avons :

$$A^2\frac{d^2\xi'}{dt^2} = \Delta\xi'.$$

d'où nous tirons :

$$A^2\frac{d^2\pi}{dt^2} = \Delta\pi + C^{te}.$$

Cette constante est indépendante du temps, elle est nulle si on part du repos. On peut donc écrire la valeur de Z :

$$Z = -\Delta\pi + \frac{d^2\pi}{dz^2}.$$

Calculons π en nous servant de l'équation :

$$A^2 \frac{d^2\pi}{dt^2} = \Delta\pi.$$

Nous voulons intégrer cette équation en supposant que π ne dépend que de r, r étant défini par $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

La solution est :

$$\pi = \frac{f\left(r - \frac{t}{A}\right) + f_1\left(r + \frac{t}{A}\right)}{r},$$

Il nous reste à déterminer les fonctions f et f_1, ce que nous ferons par les conditions aux limites.

46. Conditions aux limites. — I. — Pour $r = a$, a étant le rayon de la sphère conductrice, la force électrique doit être dirigée suivant le rayon (normale au conducteur). Pour exprimer cette condition, nous allons transformer les expressions de X, Y, Z.

Nous indiquerons, pour simplifier, les différentiations par rapport à r par le signe $'$. On a :

$$\frac{d\pi}{dz} = \pi' \frac{dr}{dz} = \pi' \frac{z}{r}$$

$$\frac{d^2\pi}{dz.dx} = \left(\frac{\pi'}{r}\right)' \frac{zx}{r}$$

$$\frac{d^2\pi}{dz^2} = \left(\frac{\pi'}{r}\right)' \frac{z^2}{r} + \frac{\pi'}{r}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \left(\frac{\pi'}{r}\right)' \frac{xz}{r} \\ Y &= \left(\frac{\pi'}{r}\right)' \frac{yz}{r} \\ Z &= \left(\frac{\pi'}{r}\right)' \frac{z^2}{r} - \Delta\pi + \frac{\pi'}{r}. \end{aligned}\right.$$

Ces expressions montrent que le vecteur X, Y, Z est la somme de deux vecteurs dont le premier a pour composantes :

$$\left(\frac{\pi'}{r}\right)' \frac{xz}{r}. \qquad \left(\frac{\pi'}{r}\right)' \frac{yz}{r} \qquad \left(\frac{\pi'}{r}\right)' \frac{z^2}{r}.$$

Ces trois composantes étant entre elles comme x, y, z, le vecteur est dirigé suivant le rayon.

Le second vecteur est parallèle à oz. Il doit donc être nul à la surface de la sphère, c'est-à-dire qu'on aura :

$$\Delta\pi = \frac{\pi'}{r}$$

ou :

$$\pi'' + 2\frac{\pi'}{r} = \frac{\pi'}{r}.$$

$$\pi'' + \frac{\pi'}{r} = 0 \qquad \text{pour } r = a.$$

II. — Une autre condition est que, au moment où le mouvement commence, c'est-à-dire lorsqu'on est encore dans un état électrostatique, (X, Y, Z) se réduise à la force due à l'action électrostatique, c'est-à-dire au potentiel de la sphère, qui n'est autre que φ' ou $\frac{d\pi}{dz}$.

π doit donc être alors égal à $\frac{1}{r}$; de plus, à ce moment, on doit avoir :

$$\frac{d\pi}{dt} = 0,$$

puisque le champ est encore à l'état de repos.

Ainsi, pour toutes les valeurs de r plus grandes que a, on doit avoir :

$$f(r) + f_1(r) = 1$$
$$f'(r) - f_1'(r) = 0.$$

De la première de ces deux relations on déduit :

$$f'(r) + f_1'(r) = 0.$$

Ce qui montre que :

$$f'(r) = f_1'(r) = 0.$$

Ainsi les fonctions $f(r)$ et $f_1(r)$ doivent être des constantes; leur somme doit être égale à 1. Nous pouvons donc choisir :

$$f_1(r) = 0 \qquad f(r) = 1 \qquad \text{pour } r > a.$$

De plus, f_1 restera nulle dans la suite, puisque sa variable $r + \frac{t}{A}$ est constamment plus grande que a quand t est positif et que r a pour valeur minimum a.

Il nous reste donc :

$$\pi = \frac{f\left(r - \frac{t}{A}\right)}{r}.$$

Nous allons maintenant déterminer la fonction f. Elle sera égale à l'unité quand son argument sera supérieur à a.

Si nous considérons un point de l'espace extérieur à la sphère, l'état de repos s'y maintiendra tant que π restera égal à $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire jusqu'au temps :

$$t = \mathrm{A}\,(r - a)$$

le temps étant compté à partir du moment où la perturbation prend naissance à la surface de la sphère.

Nous aurons donc à considérer à chaque instant une sphère de rayon :

$$r = a + \frac{t}{\mathrm{A}}$$

à l'extérieur de laquelle aucun changement ne s'est encore produit.

Cherchons l'expression de la fonction f à l'intérieur de cette sphère.

On a :

$$\pi' = \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2}$$

$$\pi'' = \frac{f''}{r} - \frac{2f'}{r^2} + \frac{2f}{r^3}$$

et

$$\pi'' + \frac{\pi'}{r} = \frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2} + \frac{f}{r^3}$$

Pour $r = a$ cette expression doit être nulle, d'après la première condition.

On doit donc avoir :

$$f''\left(a - \frac{t}{\mathrm{A}}\right) - \frac{f'\left(a - \frac{t}{\mathrm{A}}\right)}{a} + \frac{f\left(a - \frac{t}{\mathrm{A}}\right)}{a^2} = 0.$$

C'est une équation linéaire à coefficients constants, qu'on peut écrire

$$f''(\omega) - \frac{f'(\omega)}{a} + \frac{f(\omega)}{a^2} = 0$$

en posant

$$\omega = a - \frac{t}{A}.$$

Deux intégrales particulières de cette équation sont :

$$f = e^{\alpha\omega} \qquad f = e^{\alpha'\omega}$$

α et α' étant les racines de l'équation

$$\alpha^2 - \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{a^2} = 0$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}\right].$$

Les deux solutions particulières peuvent donc s'écrire :

$$f = e^{\frac{\omega}{2a}} e^{\frac{i\omega}{2a}\sqrt{3}} \quad \text{et } f = e^{\frac{\omega}{2a}} e^{-\frac{i\omega}{2a}\sqrt{3}}.$$

De là on déduit que l'intégrale générale est :

$$f = B.e^{\frac{r}{2a}} e^{-\frac{t}{2aA}}. \cos.\frac{\sqrt{3}}{2a}\left(r - \frac{t}{A}\right) + C.e^{\frac{r}{2a}} e^{-\frac{t}{2aA}} \sin.\frac{\sqrt{3}}{2a}\left(r - \frac{t}{A}\right).$$

Les constantes B et C se détermineront par les conditions aux limites.

Cette équation montre que le mouvement est bien périodique, mais avec amortissement, puisque l'exposant de e contient t avec le signe —.

La même chose se passe pour un excitateur quelconque,

de sorte que, pour connaître un excitateur il faut connaître sa période et son amortissement.

Nous avons vu comment Hertz calculait la période de son excitateur ; nous allons voir maintenant comment il en a calculé l'amortissement.

47. Calcul de l'amortissement dans un excitateur. — Pour calculer l'amortissement, Hertz s'est appuyé sur le théorème de Poynting : les variations de la quantité d'énergie contenue dans un volume déterminé sont les mêmes que celles d'un fluide fictif animé d'une certaine vitesse, cette vitesse étant représentée par un vecteur que nous avons appelé le vecteur radiant ; nous avons trouvé que ce vecteur radiant est perpendiculaire au plan des deux autres vecteurs X, Y, Z et L, M, N, et égal au facteur constant $\frac{1}{4\pi A}$ multiplié par l'aire du parallélogramme construit sur ces deux derniers vecteurs.

Hertz a considéré l'énergie au début, a calculé la quantité d'énergie rayonnée au moyen du théorème que nous venons de rappeler et en a déduit l'amortissement. Il a simplifié le calcul de l'énergie rayonnée en considérant celle qui rayonne à travers une sphère de très grand rayon.

Remarque. — Remarquons à propos du théorème de Poynting que la quantité d'énergie rayonnée à travers la surface d'un conducteur est nulle : cela résulte de ce que le vecteur radiant est perpendiculaire à la force électrique ; celle-ci étant normale au conducteur, le vecteur radiant est tangent à la surface ; sa composante suivant la normale est donc nulle et il n'y a pas, par suite, d'énergie rayonnée à travers le conducteur.

48. Voyons maintenant comment on peut calculer l'amortissement. L'une des quantités X, Y, Z, L, M, N est de la forme :

$$Ae^{-\alpha t}.\cos \beta t + Be^{-\alpha t}.\sin \beta t.$$

A et B étant des fonctions de x, y, z. Le carré d'une expression de ce genre contiendra des termes du second degré en sin βt et cos βt.

L'énergie sera donc de la forme

$$E = e^{-2\alpha t} f(\cos \beta t, \sin \beta t)$$

la fonction f étant un polynôme homogène du deuxième degré.

La période de X, Y, Z ou L, M, N est :

$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

$f(\cos \beta t, \sin \beta t)$ étant du second degré aura pour période $\frac{T}{2}$. Soit E_0 la valeur de E au début d'une demi-période, et E_1 sa valeur au bout de la demi-période $\frac{T}{2}$. On aura :

$$E_1 = e^{-\alpha T}.E_0,$$

d'où :

$$\alpha = \frac{1}{T} \log \frac{E_0}{E_1}.$$

Cette quantité α est celle qui exprime l'amortissement.

Supposons qu'on ait pu calculer d'une façon quelconque E_0, énergie totale au début de la demi-période, et aussi $E_0 - E_1$, énergie qui a disparu ; on en déduira E_1 et par suite α.

C'est ce que Hertz a fait en prenant l'énergie à l'intérieur d'une sphère de très grand rayon : l'énergie perdue est seulement celle qui a rayonné à travers la sphère, puisque le rayonnement à travers le conducteur est nul d'après la remarque que nous avons faite tout à l'heure.

Calcul de E_0. — On peut se rendre compte de la différence de potentiel qui existe entre les deux boules de l'excitateur quand l'étincelle éclate. Hertz admet qu'elle est d'environ 100 unités électrostatiques ; nous la désignerons par V ; cette quantité disparaîtra d'ailleurs de nos calculs, comme nous allons le voir bientôt.

Les 2 sphères sont à des potentiels $+\frac{V}{2}$ et $-\frac{V}{2}$; leur capacité est d'environ 15 centimètres. Pour avoir l'énergie totale, il suffit de calculer l'énergie électrostatique par la méthode ordinaire. On a :

$$E_0 = \frac{q.V}{2} = \frac{cV^2}{4}.$$

Calcul de $E_0 - E_1$ *pendant la demi-période.* — Le vecteur radiant est proportionnel à l'aire du parallélogramme construit avec les vecteurs X, Y, Z et L, M, N comme côtés ; chacun de ces vecteurs est proportionnel au potentiel V, l'intensité du courant périodique étant proportionnelle à q et par suite à V. Il en résulte que le vecteur radiant est lui-même proportionnel à V^2, et par suite $E_0 - E_1$ est proportionnelle à V^2. Il en est de même de E_0 ; donc le rapport :

$$\frac{E_0 - E_1}{E_0}$$

et par suite le rapport :

$$\frac{E_1}{E_0}$$

sont indépendants de V ; la valeur de V n'influera donc pas sur celle de α.

Appliquons maintenant les principes que nous avons exposés : le vecteur ξ, η, ζ est donné par :

$$\xi = -A \int \frac{u''.d\tau'}{r}$$

$$\eta = -A \int \frac{v''.d\tau'}{r}$$

$$\zeta = -A \int \frac{w''.d\tau'}{r}$$

expressions dans lesquelles u'' par exemple est la valeur de u au point $x'y'z'$ et au temps $t - rA$.

Chaque élément du courant superficiel doit être regardé comme le centre d'une onde sphérique, et les valeurs correspondantes de ξ, η, ζ dépendront des valeurs des composantes u, v, w du courant au moment où l'onde a quitté l'élément.

Il faudrait pour composer ces ondes sphériques en un point de l'espace effectuer un calcul compliqué. Mais le calcul se simplifie lorsqu'on l'applique à une sphère de très grand rayon, car pour un point éloigné une onde sphérique peut être considérée comme une onde plane.

Ceci nous conduit à étudier la propagation des ondes planes.

49. Étude des ondes planes. — Prenons le plan de l'onde comme plan des xy; alors ξ, η, ζ, X, Y, Z, L, M, N seront des fonctions de $z - \frac{t}{A}$ seulement ; en effet, d'après nos formules

de la forme :

$$\zeta = -A\int \frac{f(x', y', z', t - rA)}{r}$$

les ondes sphériques se propagent avec la vitesse de la lumière, et il en est encore de même lorsque le rayon est très grand, c'est-à-dire lorsqu'on a affaire à une onde plane.

Ces différentes quantités étant des fonctions de $z - \frac{t}{A}$, il en résulte que :

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\xi}{dy} = 0$$

$$\frac{d\xi}{dz} = -A\frac{d\xi}{dt}$$

et de même :

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta}{dy} = 0$$

$$\frac{d\eta}{dz} = -A\frac{d\eta}{dt}.$$

Nos équations fondamentales deviennent alors :

$$\left\{\begin{aligned} L &= -\frac{d\eta}{dz} \\ M &= \frac{d\xi}{dz} \\ N &= 0\,; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dL}{dt} &= -\frac{dY}{dz} \\ A\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} \\ A\frac{dN}{dt} &= 0\,; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} \\ A\frac{dY}{dt} &= -\frac{dL}{dz} \\ A\frac{dZ}{dt} &= 0. \end{aligned}\right.$$

De la dernière équation on tire $Z = 0$, puisqu'on part du repos. On a donc :

$$Z = N = 0,$$

ce qui montre que l'onde est transversale, c'est-à-dire que les vecteurs X, Y, Z et L, M, N sont situés dans le plan de l'onde.

D'ailleurs, on a :

$$A\frac{dL}{dt} = -A\frac{d^2\eta}{dz.dt}$$

et :

$$A\frac{dY}{dt} = -\frac{dL}{dz} = \frac{d^2\eta}{dz^2}.$$

Mais nous avons aussi :

$$\frac{d\eta}{dz} = -A\frac{d\eta}{dt},$$

d'où l'on tire en différenciant par rapport à z :

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = -A\frac{d^2\eta}{dz.dt}.$$

On a donc :

$$A\frac{dL}{dt} = A\frac{dY}{dt},$$

d'où l'on tire :

$$L = Y = +A\frac{d\eta}{dt}.$$

On obtiendrait de même :

$$M = -X = -A \frac{d\xi}{dt}.$$

Interprétation géométrique. — Ainsi, la force électrique et la force magnétique sont situées dans le plan de l'onde ; elles sont perpendiculaires entre elles ; elles sont égales en grandeur.

Le vecteur radiant est donc normal au plan de l'onde et proportionnel au carré du vecteur X, Y, Z ou du vecteur L, M, N.

Remarquons que la force électrique et la force magnétique sont égales au vecteur :

$$A \frac{d\xi}{dt}, \qquad A \frac{d\eta}{dt}, \qquad 0.$$

qui est la projection sur le plan de l'onde du vecteur :

$$A \frac{d\xi}{dt}, \qquad A \frac{d\eta}{dt}, \qquad A \frac{d\zeta}{dt}.$$

50. Calcul du vecteur ξ, η, ζ. — Considérons un élément quelconque du courant : il est le centre d'une onde sphérique élémentaire. Les composantes du courant sont :

$$u.d\tau', \qquad v d\tau', \qquad w d\tau'.$$

La portion du vecteur ξ, η, ζ qui est due à l'élément de courant considéré a même direction que (u, v, w) ; il faut, en la calculant, tenir compte de la différence de phase provenant du chemin parcouru. On arrivera à des composantes de la forme :

$$A\, e^{-Kt} \cos \lambda t + B e^{-Kt} \sin \lambda t.$$

D'autres éléments de courant donneront des ondes de même nature. Il peut arriver que ces ondes interfèrent, et cela pour deux raisons :

1° A cause de la différence de marche provenant de la projection sur la normale à l'onde de la distance AB de deux éléments situés en A et B e !donnant naissance à deux ondes élémentaires (*fig.* 13) ;

2° La direction des éléments superficiels peut ne pas être la même en A et en B.

Hertz a fait le calcul comme si son excitateur était réduit à un seul élément de courant, c'est-à-dire comme si la longueur de l'excitateur était infiniment petite par rapport à la demi-longueur d'onde : il n'a eu alors à considérer qu'une seule onde, sans complications dues aux interférences. Mais le calcul ainsi conduit semble peu rigoureux, car il est difficile de considérer la longueur de l'excitateur comme infiniment petite par rapport à la demi-longueur d'onde, c'est-à-dire par rapport à 3 mètres environ.

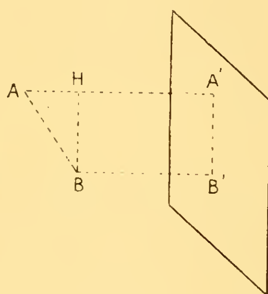


Fig. 13.

Une autre difficulté se présente dans ce calcul : il semble qu'il soit nécessaire de connaître l'amortissement pour calculer les composantes du courant, et c'est justement l'amortissement que l'on veut calculer au moyen de ces composantes ; Hertz suppose dans une première approximation que l'amortissement est nul, ce qui ne cause pas une grande erreur, puisque le calcul s'applique seulement à la durée d'une demi-période. Cette supposition lui permet de calculer

ensuite une valeur assez approchée de l'amortissement : on pourrait d'ailleurs procéder par approximations successives.

Résultats. — Hertz a trouvé pour E_0 54 000 unités électrostatiques. Dans le calcul de $E_0 — E_1$, il a commis une erreur, provenant de ce qu'il s'était trompé dans le calcul de la période ; il a trouvé 2 400 au lieu de $2\,400 \times 3$.

Remarque. — Nous avons admis que toute l'énergie perdue était rayonnée ; mais il y a, de plus, une certaine quantité d'énergie transformée en chaleur ; il est difficile de l'évaluer, car la résistance de l'interrupteur à étincelles est variable ; Hertz pense qu'elle est d'environ 3 ou 400 unités électrostatiques.

51. Circonstances qui peuvent faire varier l'amortissement. — Ce sont les interférences des différentes ondes élémentaires qui font varier l'amortissement : si ces ondes s'ajoutent, le vecteur radiant a une valeur considérable et l'amortissement sera notable. Si, au contraire, elles se détruisent, l'énergie rayonnée aura une valeur relativement petite et l'amortissement sera faible.

Quand l'appareil sera constitué par un fil recourbé, on aura en deux points opposés des courants de sens contraire, donnant naissance à des ondes qui interféreront : il pourra arriver que l'amortissement soit ainsi bien diminué.

C'est justement ce qui a lieu dans l'appareil de M. Blondlot. Le courant a sensiblement la même valeur en tous les points du fil ; dans une direction quelconque se trouvent sur le fil deux éléments où le courant a la même valeur, mais où le sens du courant n'est pas le même ; de plus, le fil étant très court, la différence de marche due à la distance des deux

éléments est faible par rapport à la demi-longueur d'onde : les effets des deux éléments de courant se détruisent donc sensiblement.

52. Calcul complet. — Pour faire un calcul complet, voici comment on peut procéder :

On cherche l'énergie rayonnée de l'instant $t = 0$ à $t = \infty$. On égale ensuite à E_0 l'expression trouvée et de cette égalité on déduit l'amortissement.

Remarquons que le vecteur radiant n'est pas pendant tout ce temps de la forme :

$$e^{-2\alpha t} f(\sin \beta t, \cos \beta t),$$

f étant un polynôme du second degré homogène ; en effet, au moment où l'excitateur entre en action, de ses différents points partent des ondes qui n'arrivent pas en même temps en un point de la surface fermée à travers laquelle on calcule le rayonnement. Une certaine onde, celle issue du point de l'excitateur le plus voisin du point considéré de la surface, arrivera d'abord en ce point ; ce n'est qu'au bout d'un certain temps, très court à la vérité, que le vecteur radiant aura la forme que nous lui avons supposée. Il faudrait donc dans un calcul complet tenir compte de cette période initiale ; mais les autres causes d'erreur, dont nous avons parlé, sont certainement bien plus importantes que celle-ci.

Nous allons voir maintenant comment on peut vérifier expérimentalement les calculs de Hertz concernant la période et l'amortissement de son excitateur.

CHAPITRE IV

PHÉNOMÈNES DE RÉSONANCE. — PROPAGATION LE LONG D'UN FIL

La mesure directe de la période d'un excitateur est impossible ; si donc nous voulons étudier expérimentalement cette période, il nous faudra employer des méthodes indirectes. Nous allons examiner successivement deux phénomènes dont l'étude nous permettra de découvrir les lois suivant lesquelles varie cette période, les phénomènes de résonance et la propagation des perturbations électromagnétiques le long de fils conducteurs.

53. Résonance électrique. — Considérons un excitateur fixe et un résonateur dont on peut faire varier les dimensions ou la capacité ; l'étincelle qui se produit à l'interrupteur du résonateur a une intensité variable. A un certain moment, cette intensité de l'étincelle passe par un maximum. On dit alors qu'il y a résonance : les périodes de l'excitateur et du résonateur sont alors les mêmes.

On peut utiliser ce fait pour comparer la période de deux excitateurs ou de deux résonateurs, pour trouver le rapport des périodes.

En effet, doublons les dimensions d'un excitateur ou d'un résonateur : sa période sera par là même doublée. Il n'y a même pas besoin pour le démontrer de s'appuyer sur la formule de Thomson, car c'est une conséquence de l'homogénéité des formules.

Si dans nos équations fondamentales on change x, y, z et t en λx, λy, λz, λt, sans changer les valeurs de X, Y, Z, L, M, N et A, les équations ne changeront pas. Mais changer x, y, z en λx, λy, λz, c'est multiplier par λ les dimensions du résonateur et changer t en λt, c'est multiplier par λ sa période propre.

Partant de là, si nous voulons trouver le rapport des périodes de deux excitateurs, nous construirons une série de résonateurs semblables, mais de dimensions différentes, et nous chercherons deux de ces résonateurs qui soient respectivement en accord avec les deux excitateurs considérés ; le rapport des périodes est égal au rapport de leurs dimensions linéaires.

54. Différence avec la résonance acoustique. — Lorsqu'on étudie la résonance en acoustique, on trouve un maximum très net dans l'intensité de la résonance. Si on construit une courbe dans laquelle les abscisses représentent les hauteurs des sons que l'on étudie avec un certain résonateur, et les ordonnées l'intensité de la résonance, on obtient une courbe telle que la première de la figure 14.

Dans le cas présent, au contraire, le maximum est très

mal marqué. On peut représenter l'intensité de la résonance par la plus grande distance des deux boules du micromètre à étincelles pour laquelle des étincelles se produisent : pour une certaine forme de l'excitateur et du résonateur, on rapprochera au moyen d'une vis les deux extrémités du micromètre jusqu'à ce qu'on obtienne des étincelles, et c'est la distance à laquelle on sera ainsi conduit qu'on portera en ordonnée ; plus cette distance sera grande, plus l'intensité de la résonance sera grande. On pourra faire varier les dimensions du résonateur et porter en abscisse sa capacité ; les courbes que l'on obtient ainsi sont analogues à la deuxième courbe de la figure 14 ; le maximum n'y est pas nettement marqué.

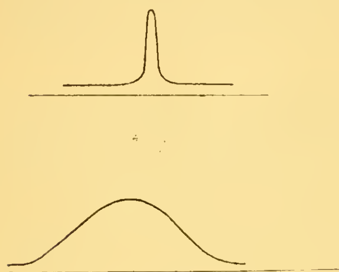


Fig. 14.

55. Causes de cette différence. — Différentes explications ont été proposées pour rendre compte de cette différence.

I. — *Explications de MM. Sarasin et de la Rive.* — D'après MM. Sarasin et de la Rive, un excitateur produit non pas une vibration simple, mais une vibration complexe ; il y aurait là quelque chose d'analogue à une source de lumière, qui, au lieu de donner dans un spectre une raie fine, donnerait une bande estompée.

Un excitateur pourrait, à la vérité, produire différents harmoniques, du moins la théorie permet de le prévoir ; mais

cette théorie n'est pas assez bien établie pour que l'on puisse connaître la loi de ces vibrations harmoniques ; cette loi serait, en tous cas, moins simple que celle des harmoniques en acoustique, harmoniques qui sont nettement séparés.

II. — Une deuxième explication peut être proposée et paraît plus près de la vérité. Pour l'exposer, nous allons donner une théorie de la résonance, qui s'appliquera aussi bien à un phénomène électrique qu'à un phénomène d'optique ou d'acoustique.

56. Théorie générale de la résonance. — Supposons un appareil qui puisse être le siège de mouvements périodiques ; ces mouvements seront naturellement troublés quand interviendront des causes perturbatrices extérieures ; si celles-ci sont elles-mêmes périodiques et de période voisine de la période précédente, le corps considéré, partant du repos, pourra acquérir un mouvement intense : c'est ce qu'on appelle un phénomène de résonance.

Une quantité variera en fonction du temps : supposons que la loi périodique soit une loi pendulaire ; cette quantité, que nous désignerons par y, aura pour expression :

$$y = A \cos \beta t + B \sin \beta t$$

et satisfera à l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \beta^2 y = 0.$$

Supposons maintenant une cause excitatrice : pour en tenir compte, il nous faudra donner un second membre à

l'équation précédente et l'écrire :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \beta^2 y = f(t).$$

Nous allons supposer que $f(t)$ est une fonction périodique avec amortissement, ce qui a lieu dans l'excitateur de Hertz et, en somme, dans presque tous les cas. Nous aurons, par exemple, pour $f(t)$ une fonction de la forme :

$$f(t) = \mathrm{A}e^{-\alpha t} \cos \gamma t + \mathrm{B}e^{-\alpha t} \sin \gamma t.$$

Cette expression est la partie réelle de :

$$(\mathrm{A} - i\mathrm{B})\, e^{(-\alpha + i\gamma)t}.$$

Nous allons poser :

$$\mathrm{A} - i\mathrm{B} = c$$

$$-\alpha + i\gamma = \varepsilon$$

et nous allons intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \beta^2 y = ce^{\varepsilon t}$$

Nous trouverons une intégrale imaginaire dont nous ne conserverons que la partie réelle.

L'intégrale générale de cette équation est de la forme :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}. \cos \beta t + \mathrm{B}. \sin \beta t + \frac{c}{\beta^2 + \varepsilon^2} e^{\varepsilon t}$$

Pour déterminer A et B, nous allons nous reporter aux conditions initiales : nous supposons qu'on part du repos.

Pour $t = o$, on devra donc avoir :

$$Y = \frac{dY}{dt} = o$$

Ces deux conditions nous donnent :

$$A = -\frac{c}{\beta^2 + \varepsilon^2}$$

$$B = -\frac{\varepsilon}{\beta}\frac{c}{\beta^2 + \varepsilon^2}.$$

Comme ε a sa partie réelle négative, dans le calcul de l'amplitude de la vibration résultante on pourra négliger le dernier terme et considérer seulement les deux autres. Si A_1 et B_1 sont les parties réelles de A et de B, l'amplitude sera alors proportionnelle à :

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

Nous ne voulons pas faire le calcul complet, mais seulement nous rendre compte du sens des phénomènes ; nous sommes donc conduits à étudier les variations de l'amplitude seulement dans le voisinage de son maximum, c'est-à-dire quand $\beta^2 + \varepsilon^2$ est voisin de o.

Faisons varier β d'une manière continue, en ne lui donnant que des valeurs voisines de celle qui correspond au maximum : un seul terme variera d'une façon sensible, c'est le terme en $\frac{1}{\beta^2 + \varepsilon^2}$; l'expression $\beta^2 + \varepsilon^2$ varie lentement elle-même au voisinage de 0, mais son inverse varie rapidement. On pourra donc regarder les termes autres que $\frac{1}{\beta^2 + \varepsilon^2}$ comme constants.

Lorsque $\varepsilon^2 + \beta^2$ sera voisin de 0, le rapport $\frac{\varepsilon}{\beta}$ sera voisin de $-i$.

On aura donc sensiblement :

$$B = iA$$

et B_1 sera le coefficient de i dans A_1 changé de signe.

L'amplitude :

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

se réduira donc au module de A, c'est-à-dire au module de :

$$\frac{c}{\beta^2 + \varepsilon^2}.$$

Il nous faut donc chercher comment varie le module de $\beta^2 + \varepsilon^2$, qui est :

$$\sqrt{(\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}.$$

Si nous supposons $\alpha = 0$, cette expression se réduit à :

$$\sqrt{(\beta^2 - \gamma^2)^2},$$

c'est-à-dire que l'amplitude est inversement proportionnelle à $\beta^2 - \gamma^2$. L'amplitude de la résonance devient donc infinie quand β tend vers γ, ce qui revient à dire que la résonance a un maximum bien marqué quand les deux périodes sont égales.

Si au contraire α n'est pas nul, la quantité placée sous le radical ne peut s'annuler : il y aura un maximum, mais d'autant moins marqué que α sera plus grand ; il aura lieu pour :

$$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2.$$

Ce résultat nous conduit à penser que, si la résonance est moins marquée, dans le cas que nous étudions, qu'en acoustique, cela tient à ce que l'amortissement a une valeur plus considérable.

M. Bjerknes, en s'appuyant sur les considérations qui précèdent, a cherché à calculer, pour l'excitateur de Hertz, l'amortissement, qu'il a trouvé plus considérable que ne l'indique la théorie [1].

Remarques. — I. — Nous avons supposé que le résonateur n'avait pas d'amortissement ; la théorie montre, en effet, que cet amortissement est faible, et M. Bjerknes l'a vérifié expérimentalement [2].

Supposons cependant que cet amortissement ne soit pas nul et voyons comment le résultat précédent serait modifié.

L'équation différentielle représentant un mouvement périodique amorti est :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \delta \cdot \frac{dy}{dt} + \beta^2 y = 0$$

et notre équation de tout à l'heure devient :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \delta \cdot \frac{dy}{dt} + \beta^2 y = f(t).$$

Le calcul se conduirait absolument comme lorsque $\delta = 0$: au lieu de $\beta^2 + \varepsilon^2$, on aurait à considérer l'expression :

$$\varepsilon^2 + \delta\varepsilon + \beta^2,$$

dont dépendrait l'amplitude des vibrations ; on trouverait

[1] Bjerknes, *Wied. Annalen*, t. LXIV, p. 74.
[2] Bjerknes, *Wied. Annalen*, t. LXIV, p. 74.

qu'il n'y a résonance parfaite que quand les périodes sont égales et que, de plus, les amortissements sont les mêmes.

II. — Nous avons, en somme, cherché ce qui se passe lorsque le terme $e^{\varepsilon t}$ était très affaibli, puisque nous avons négligé l'influence de ce terme. Or ce n'est pas tout à fait ce qu'on mesure : on n'observe qu'un fait, la production de l'étincelle au micromètre du résonateur. Nous mesurons donc, non pas l'amplitude des variations de y, quand elles sont devenues régulières, mais le maximum de y. Le calcul est plus compliqué que dans le cas précédent ; mais le maximum de y reste de la forme :

$$\frac{\text{fonction de } (\varepsilon, \beta, \gamma)}{|\beta^2 + \varepsilon^2|}.$$

Le dénominateur est toujours le module de $\beta^2 + \varepsilon^2$, et le numérateur pourra, comme précédemment, être supposé constant : on arrivera aux mêmes résultats.

En somme, les phénomènes de résonance sont compliqués par l'amortissement ; nous allons étudier un autre procédé de vérification de la théorie de Hertz.

Il n'y a pas toutefois, entre l'explication de MM. Sarasin et de la Rive et la mienne, une opposition aussi tranchée qu'on pourrait le croire au premier abord.

Les deux physiciens genevois supposent la coexistence de plusieurs harmoniques, de sorte que la perturbation pourrait être exprimée par la formule :

$$y = \sum (A_\alpha \cos \alpha t + B_\alpha \sin \alpha t),$$

les α, les A_α, les B_α étant des constantes, ou mieux (puisqu'ils

ont constaté, non une série d'harmoniques discrètes, mais une sorte de spectre continu) par la formule suivante, où les sommes sont remplacées par des intégrales :

$$(\alpha) \qquad y = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(q) \cos qt + \psi(q) \sin qt]\, dq.$$

J'ai proposé au contraire la formule :

$$(\beta) \qquad y = e^{-\alpha t} (\mathrm{A} \cos \gamma t + \mathrm{B} \sin \gamma t).$$

Or une fonction quelconque peut être représentée par l'intégrale de Fourier, c'est-à-dire par l'intégrale (α). La formule (β) peut donc se ramener à la forme (α), en faisant un choix particulier des fonctions $\varphi(q)$ et $\psi(q)$. Mon explication rentre donc, comme cas particulier, dans celle de M. Sarasin.

57. Propagation des perturbations électromagnétiques le long d'un fil conducteur. — Un autre procédé pour vérifier les conséquences de la théorie de Hertz est la mesure directe des longueurs d'onde. Supposons que nous fassions parcourir un fil conducteur par des perturbations électromagnétiques ; *si nous admettons que la propagation se fait avec une vitesse constante, la même pour les différentes perturbations*, et que nous puissions mesurer les longueurs d'ondes qui correspondent à deux excitateurs différents, nous connaîtrons le rapport des périodes de ces deux excitateurs.

Si nous *admettons* de plus que cette vitesse constante a pour valeur $\frac{1}{\mathrm{A}}$, nous connaîtrons la valeur absolue de chaque période.

Si les résultats ainsi obtenus sont conformes à ceux que donne la théorie, ce sera une *probabilité* de plus pour elle.

Pour forcer les perturbations électromagnétiques à parcourir un fil, on peut employer différents procédés, parmi lesquels nous distinguerons le procédé électrostatique de Hertz et le procédé électromagnétique de M. Blondlot.

Méthode de Hertz. — Deux plateaux AB, de grande capacité, remplacent les deux sphères de l'excitateur (*fig.* 15);

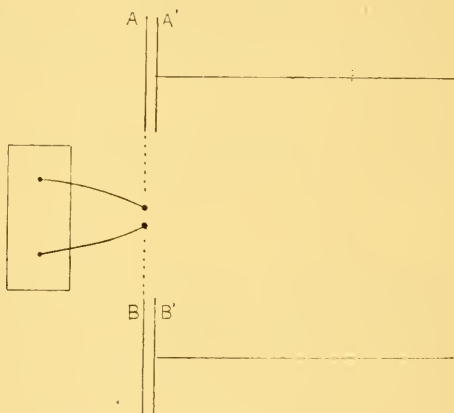


Fig. 15.

vis-à-vis de ces deux plateaux sont placés deux autres A'B', au milieu de chacun desquels est attaché un fil d'une certaine longueur. On augmente ainsi les capacités des plateaux A et B en formant avec chacun d'eux une sorte de condensateur.

Si l'excitateur entre en mouvement, l'un des plateaux, A par exemple, se charge positivement, B négativement; au bout d'une demi-oscillation, les charges changent de signe et le même fait se reproduit au bout de temps égaux.

Les plateaux A' et B' se chargent par influence d'électrici-

tés de signes contraires à celles des plateaux A et B, et les fils deviennent le siège d'un phénomène ondulatoire dont la période est celle de l'excitateur.

Méthode de M. Blondlot. — L'excitateur a la forme d'un fil recourbé aboutissant à une sorte de condensateur (*fig.* 16); autour de ce premier fil s'en trouve un second qui se continue par deux fils rectilignes de grande longueur. On isole les deux fils circulaires l'un de l'autre en les entourant d'une gaine de caoutchouc.

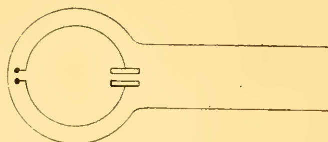


Fig. 16.

Quand les vibrations se produisent, l'excitateur est le siège de courants périodiques qui donnent lieu dans le deuxième fil à des courants induits de même période.

58. Ondes stationnaires dans les fils. — Pour pouvoir mesurer la longueur d'onde, il faut produire des ondes stationnaires. On peut pour cela employer différents moyens.

I. — Supposons un des fils des appareils précédents coupé en un point C : il se produira une onde directe de l'origine du fil au point C; elle s'y réfléchit, de sorte qu'on obtiendra deux ondes périodiques se propageant en sens contraires, et interférant, d'où la production d'un système de nœuds, points où le courant est nul, et de ventres, points où le courant est maximum.

Le point C où le fil a été coupé doit être un nœud; le courant doit, en effet, y être nul, puisque l'électricité une fois parvenue en C doit s'y arrêter et revenir sur ses pas; cela n'est d'ailleurs qu'à peu près vrai, car il se trouve, en somme, au

point C une petite capacité où peuvent s'accumuler de petites quantités d'électricité.

II. — On peut mettre les deux extrémités du fil en communication avec les armatures d'un condensateur. La réflexion se produit alors dans des conditions différentes. Il y aura un ventre à cette extrémité du fil, car une grande quantité d'électricité doit entrer dans le condensateur pour le charger et le décharger alternativement ; et cela sans que le potentiel varie sensiblement. Or nous verrons plus loin que les points où le potentiel est constant sont des ventres pour le courant.

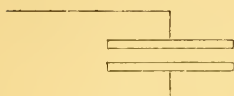


Fig. 17.

III. — On peut enfin réunir les deux extrémités du fil. Une perturbation partie de l'excitateur suit alors le premier fil rectiligne jusqu'au bout et revient jusqu'à l'excitateur en suivant le second fil ; en même temps une autre perturbation part de l'excitateur en suivant le premier fil et revient ensuite le long du second fil. Chacun des fils est donc parcouru par deux perturbations marchant en sens contraire qui interfèrent en produisant des ondes stationnaires. Au départ ces deux perturbations sont égales et de signe contraire. Il se produit alors à cette extrémité commune un nœud, par raison de symétrie.

Résultats. — Hertz pensait donc trouver sur le fil des points stationnaires et voulait mesurer leur intervalle à l'aide de son résonateur : près d'un nœud, celui-ci ne donnerait pas d'étincelles ; près d'un ventre, au contraire, les étincelles auraient un maximum.

Ses premières expériences confirmèrent sa manière de voir ; du nombre trouvé pour la longueur d'onde et de la

valeur calculée de la période il déduisit la valeur de la vitesse de propagation : à cause d'une erreur de calcul, il trouva 200 000 kilomètres environ. En réalité, le résultat exact, obtenu par ce procédé, est voisin de 300 000 kilomètres.

Mais les expériences de MM. Sarasin et de la Rive montrèrent que le phénomène n'est pas si simple. Hertz avait pris un résonateur ayant sensiblement la même période que son excitateur; ces deux expérimentateurs, ayant opéré avec plusieurs résonateurs, ont reconnu que la longueur d'onde trouvée, avec un même excitateur, dépendait des dimensions du résonateur : c'est le phénomène de la résonance multiple, sur lequel nous reviendrons.

59. Théorie de la propagation, d'après Hertz. — Nous allons étudier la propagation des ondulations électromagnétiques dans un fil indéfini, rectiligne, de section constante, que nous prendrons pour axe des z.

Nous avons étudié plus haut les équations de la forme :

$$L = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz};$$

nous en avons trouvé une première solution remarquable; dans le cas particulier où le champ est de révolution, nous en avons trouvé une autre, que nous avons appelée ξ', η', ζ', et dans laquelle les composantes ξ' et η' étaient constamment nulles.

Ici, ces deux solutions se confondent; en effet, les composantes u et v du courant sont nulles, et la fonction ξ, par exemple, est nulle, puisque c'est le potentiel d'une matière

attirante fictive dans l'expression de la densité de laquelle entre u; il en est de même pour η.

Dans le diélectrique, ζ satisfait à l'équation :

$$A^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Delta\zeta = \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2}.$$

Nous allons supposer que la perturbation se propage avec une vitesse constante V qu'il s'agit de déterminer. ζ sera de la forme :

$$\zeta = f(x, y, z - Vt),$$

en sorte qu'on aura :

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} = \frac{1}{V^2} \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

En remplaçant $\frac{d^2\zeta}{dz^2}$ par cette valeur dans l'équation précédente, celle-ci devient :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}\left(A^2 - \frac{1}{V^2}\right) = \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2}. \qquad (1)$$

Pour déterminer V, nous allons nous servir des conditions aux limites : les lignes de force électrique doivent aboutir normalement à la surface du fil, c'est-à-dire normalement à Oz. A la surface on aura donc :

$$Z = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dZ}{dt} = 0.$$

Appliquons nos formules :

$$L = \frac{d\zeta}{dy}$$

$$M = -\frac{d\zeta}{dx}$$

$$A\frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}.$$

Dans cette dernière équation, on a supposé $\varepsilon = 1$ et $w = 0$, puisqu'on l'applique à un point du diélectrique.

Des deux premières de ces équations on déduit :

$$\frac{dL}{dy} = +\frac{d^2\zeta}{dy^2}$$

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{d^2\zeta}{dx^2}.$$

En remplaçant dans la troisième $\frac{dL}{dy}$ et $\frac{dM}{dx}$ par leurs valeurs, elle devient :

$$0 = A\frac{dZ}{dt} = \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2}$$

et cette relation portée dans l'équation (1) donne :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}\left(A^2 - \frac{1}{V^2}\right) = 0.$$

De là on déduit, en supposant $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ différent de 0, que la vitesse de propagation est égale à l'inverse de A, c'est-à-dire à la vitesse de la lumière.

Ne pourrait-on supposer que $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ est nul à la surface, ce

qui ne laisserait pas subsister le résultat précédent ? Cela est impossible, parce que, comme on part du repos, on déduirait de là que :

$$\zeta = 0$$

à la surface ; or ζ est le potentiel d'une manière attirante de densité proportionnelle à w, et ce potentiel croît au contraire d'une façon rapide quand on s'approche de la surface du fil.

Il résulte de là que la seule solution est celle que nous avons indiquée, l'égalité de la vitesse de propagation et de la vitesse de la lumière.

60. On peut arriver au même résultat d'une autre façon : nos équations ont une autre solution remarquable que celle dont nous venons de nous servir.

C'est le potentiel vecteur F, G, H de Maxwell ainsi défini :

F est le potentiel d'une matière attirante de densité	$+ Au$
G.	$+ Av$
H.	$+ Aw.$

Et, ici, dans u, v, w il faut tenir compte des courants de conduction et des courants de déplacement.

Nous avons :

$$A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

et d'autre part :

$$L = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz};$$

de là nous avons déduit (paragraphe 40) :

$$-X = A\frac{dF}{dt} + \frac{dV}{dx}$$

$$-Y = A\frac{dG}{dt} + \frac{dV}{dy}$$

$$-Z = A\frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dz},$$

le vecteur F, G, H remplaçant ici ξ, η, ζ.

Quelle est la signification de cette fonction V ?

Le potentiel vecteur de Maxwell F, G, H satisfait à la relation :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

En différenciant les trois équations précédentes respectivement par rapport à x, y, z, et en les ajoutant ensuite membre à membre, on obtient donc :

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -\Delta V.$$

Le premier membre est par définition $4\pi\rho$. On retrouve donc l'équation :

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

exprimant que V est le potentiel dû à une matière attirante fictive de densité ρ. Ainsi s'introduit dans la théorie de Maxwell cette notion du potentiel électrostatique qui joue un si grand rôle dans la théorie ordinaire.

Supposons un point à l'intérieur du conducteur rectiligne ; la force électrique doit y être nulle, c'est-à-dire qu'on a :

$$Z = 0$$

ou :

$$A \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dz} = 0.$$

D'autre part, nous avons la relation suivante liant ρ, u, v, w qui n'est autre que l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

et qui se réduit ici à

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{dw}{dz} = 0$$

$\frac{dV}{dt}$ est le potentiel d'une matière de densité $\frac{d\rho}{dt}$

$\frac{dH}{dz}$ . . . . $+ A \frac{dw}{dz}$.

D'après la dernière équation, il résulte de là que :

$$A \frac{dV}{dt} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

Remarquons que dans le calcul de H on a à tenir compte des courants de déplacement en même temps que du courant de conduction ; mais les premiers sont perpendiculaires à oz ; leur effet est donc nul, puisque w est la composante parallèle à oz. D'ailleurs, on pourrait voir que, même sans cette particularité, leur action serait négligeable.

Et en effet les courants de déplacement sont répandus dans tout l'espace, et les courants de conduction concentrés à la surface du fil ; si donc le fil est de petit diamètre, l'action de ces derniers sur un point intérieur au fil sera évidemment prépondérante.

De plus, alors même que les courants de déplacement qui suivent les lignes de force électrique ne seraient pas dans tout l'espace perpendiculaires à l'axe des z, ils devraient aboutir normalement au conducteur. Les portions de ces courants qui ne seraient pas perpendiculaires à l'axe des z, les seules qui puissent agir, seraient donc éloignées de la surface du fil et leur action ne pourrait être que très faible.

Nous avons donc trouvé les deux équations :

$$A \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dz} = 0$$

et :

$$A \frac{dV}{dt} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

En les différentiant respectivement, la première par rapport à z et la deuxième par rapport à t, elles donnent :

$$A \frac{d^2H}{dz.dt} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

$$A \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{d^2H}{dz.dt} = 0.$$

D'où l'on déduit :

$$A^2 \frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d^2V}{dz^2}.$$

On obtiendrait de même :

$$A^2 \frac{d^2H}{dt^2} = \frac{d^2H}{dz^2}.$$

Ces équations expriment que la perturbation se propage avec la vitesse de la lumière.

Remarque. — Ce résultat, qui est donné par la théorie de

Maxwell, est aussi donné par la théorie ordinaire, comme Kirchoff l'a démontré.

En effet, si nous employons la théorie ordinaire, nous ne devrons plus tenir compte des courants de déplacement. La force électrique est nulle en un point de l'intérieur du conducteur, si les décharges électriques sont assez rapides, comme W. Thomson l'a montré expérimentalement. Alors la composante Z est nulle, ce qui nous donne notre première équation :

$$A \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dz} = 0.$$

D'ailleurs, dans la théorie que nous avons faite, nous avons négligé les courants de déplacement : il n'y a donc rien à changer au reste de notre calcul et nous arriverons au même résultat.

Deuxième remarque. — H est le potentiel d'une matière attirante de densité Aw ; le diamètre du fil étant très petit, H sera sensiblement égal à Aw multiplié par le logarithme de ce diamètre ; il sera donc proportionnel à w et ses maxima et ses minima coïncideront avec ceux de w.

En un ventre (maximum de w et de H) on aura :

$$\frac{dH}{dz} = 0,$$

et par conséquent, d'après les équations qui précèdent :

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

le potentiel sera constant.

En un nœud ($w = H = 0$), on aura :

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

et, par conséquent :

$$\frac{dV}{dz} = 0,$$

le potentiel sera maximum.

M. Fizeau a mesuré directement la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques. Il n'a trouvé que 200 000 kilomètres environ : c'est qu'il employait des oscillations bien plus lentes que les oscillations hertziennes et qu'alors on ne peut plus négliger, comme dans le cas de ces dernières, l'effet de la résistance. (*Vide infra*, n° 87, *g*.)

61. Résonance multiple (¹). — Nous avons exposé à la fin du paragraphe 57 en quoi consiste le phénomène de la résonance multiple : la longueur d'onde mesurée au moyen d'un résonateur dépend de ce résonateur.

MM. Sarasin et de la Rive interprètent ainsi ce phénomène : l'excitateur produit une vibration complexe, tandis que le résonateur ne donne qu'un mouvement périodique seulement ; il en résulte qu'on peut mettre en évidence une infinité de systèmes de nœuds, correspondant aux diverses vibrations simples en lesquelles on peut décomposer la vibration complexe produite par l'excitateur : on mesure donc la longueur d'onde correspondant au résonateur employé.

(¹) Sarasin et de la Rive, *Comptes rendus*, janvier 1890.

On peut expliquer aussi les faits observés par l'effet des amortissements de l'excitateur et du résonateur ; comme ces amortissements jouent un rôle dans tous les cas, avant d'examiner une autre interprétation, étudions cette influence.

L'amortissement de l'excitateur est, comme nous l'avons déjà vu, très considérable par rapport à celui du résonateur ; poussons les choses à l'extrême et supposons d'abord que l'amortissement de l'excitateur soit énorme, celui du résonateur étant nul. Voici comment on peut alors se rendre compte de ce qui se passe : à l'origine B du fil se produisent une série de chocs, de perturbations de très courte durée ; chacune d'elles se propage, arrive en C devant le résonateur sur lequel elle produit un premier effet, puis se réfléchit en A et revient donner au résonateur une deuxième impulsion.



Fig. 18.

Soit i l'intensité du courant produit dans le résonateur, et β la période propre de ce résonateur. On aura :

$$i = B.\cos\beta t + C\sin\beta t$$

les constantes B et C dépendant de l'intensité du choc qui produit la première impulsion ; la deuxième impulsion se produit au temps $\alpha + h$, si la première s'est produite au temps α, h étant le temps que met la perturbation à se propager de C en A et à revenir de A en C après réflexion. Il nous suffit, pour avoir le courant dû à cette deuxième impulsion, de changer dans l'expression précédente t en $t - h$ et de la faire précéder du signe —, le courant de retour

étant de sens inverse au courant d'aller ; le nouveau courant dans le résonateur sera donc :

$$i = -B. \cos \beta (t - h) - C \sin . \beta (t - h)$$

de sorte que l'intensité totale du courant circulant dans le résonateur est :

$$I = B. [\cos \beta t - \cos \beta (t - h)] + C [\sin \beta t - \sin \beta (t - h)].$$

Pour qu'il y ait un nœud, c'est-à-dire pour qu'on n'observe point d'étincelles au résonateur, il faut que l'on ait à la fois :

$$\cos \beta t = \cos \beta (t - h)$$
$$\sin \beta t = \sin \beta (t - h),$$

ce qui exige que :

$$\beta h = 2K\pi, \text{ K étant un nombre entier.}$$

h est le temps que la perturbation met à parcourir le double de la longueur $AC = l$, avec une vitesse $V = \frac{1}{A}$. On peut donc écrire l'expression précédente :

$$\beta . 2Al = 2K\pi$$

ou :

$$l = \frac{K.\pi}{A\beta}.$$

Ainsi on aura un nœud en faisant $K = 0$, ce qui donne $l = 0$; un autre en faisant $K = 1$, ce qui donne :

$$l = \frac{\pi}{A\beta}.$$

La longueur d'un internœud dépend donc dans ce cas seu-

lement de la période du résonateur, et pas du tout de celle de l'excitateur.

62. Mais en réalité les choses ne se passent pas ainsi, et l'on doit supposer que le résonateur est mis en mouvement par une cause excitatrice de la forme :

$$B.e^{-\alpha t} \cos \gamma t + Ce^{-\alpha t} \sin \gamma t,$$

où γ est la période de l'excitateur.

L'équation donnant l'intensité du courant dans le résonateur peut alors s'écrire :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \beta^2 i = B.e^{-\alpha t} \cos \gamma t + Ce^{-\alpha t} \sin \gamma t.$$

Il nous faut intégrer cette équation en supposant, pour $t = o$, i nul ainsi que ses dérivées. On trouve :

$$i = B' e^{-\alpha t} \cos \gamma t + C'C''^{-\alpha t} \sin \gamma t + B'' \cos \beta t + e'' \sin \beta t,$$

expression que nous appellerons :

$$i = F(t)$$

et dans laquelle les constantes B', C', B'', C'' sont des fonctions linéaires de B et C.

S'il n'y avait pas de réflexion en A, l'intensité du courant dans le résonateur serait :

$$i = F(t).$$

S'il y a réflexion, la perturbation revient en sens contraire au bout d'un temps h et l'intensité du courant a pour expression :

$$i = F(t) - F(t - h).$$

Or, dans les expériences de MM. Sarasin et de la Rive, un nœud est un point où l'étincelle ne jaillit plus ou est minimum ; un ventre est un point où l'étincelle est maximum.

Pour que l'étincelle jaillisse, il faut que la différence de potentiel entre les deux bornes du micromètre dépasse une certaine limite, qui dépend elle-même de la distance de ces deux boules. Si donc l'étincelle ne jaillit pas, c'est que le maximum de cette différence de potentiel ne dépasse pas cette limite ; si elle jaillit, c'est que ce maximum est plus grand que cette limite. Ainsi la longueur de l'étincelle (c'est-à-dire la distance à laquelle on doit mettre les boules pour que l'étincelle commence à jaillir) est égale à la « distance explosive » correspondant au maximum de cette différence de potentiel.

Comme cette différence de potentiel peut être regardée comme proportionnelle à $\frac{di}{dt}$, cette différence δ sera égale à :

$$C\,[F'(t) - F'(t-h)] = \Phi(t) - \Phi(t-h).$$

Pour avoir le maximum de δ il faut égaler sa dérivée à o ; on trouve :

$$\frac{d\delta}{dt} = \Phi'(t) - \Phi'(t-h) = 0.$$

En éliminant t entre cette équation et celle qui donne δ, on obtiendrait une relation entre δ et h : les ventres et les nœuds correspondent aux maxima et aux minima de δ considéré comme fonction de h ; cherchons ces maxima et minima, en écrivant que :

$$\frac{d\delta}{dh} = 0$$

ou :

$$[\Phi'(t) - \Phi'(t-h)] \frac{dt}{dh} + \Phi'(t-h) = 0.$$

Le premier terme est nul en vertu de la relation précédente ; on a donc :

$$\Phi'(t-h) = 0$$

et cette relation elle-même se réduit à :

$$\Phi'(t) = 0.$$

Ainsi les valeurs de t et de h, qui correspondent aux ventres et aux nœuds, rendent maximum ou minimum de la fonction Φ.

Il nous faudra donc construire la courbe :

$$\delta = \Phi(t),$$

puis en étudier les maxima et minima consécutifs ; il y a une infinité de maxima et de minima : on choisira les mieux marqués.

Supposons d'abord les périodes de l'excitateur et du résonateur très voisines. La fonction $\Phi(t)$ aura d'abord une faible valeur et croîtra peu à peu, les chocs répétés faisant éprouver au résonateur des vibrations de plus en plus rapides. Les maxima bien marqués de $\Phi(t)$ et $\Phi(t\text{-}h)$ ne seront obtenus qu'au bout d'un certain temps, et alors les termes en γt seront devenus négligeables, à cause de l'exponentielle à exposant négatif qui y figure, de sorte que ce qu'on mesurera en réalité, ce sera la période propre du résonateur, qui est très voisine de celle de l'excitateur.

Si la différence des périodes est grande, la courbe $\delta = \Phi(t)$

n'est pas simple; si on pouvait déterminer exactement la position des nœuds, on trouverait une loi complexe; mais les étincelles obtenues sont faibles à cause de la différence des périodes et on ne peut pas faire cette détermination avec exactitude : de là, les phénomènes observés par MM. Sarasin et de la Rive.

63. Ces résultats concordent bien avec la deuxième explication de la résonance multiple : les nœuds et les ventres ne préexistent pas dans le fil, si on suppose, comme cela a lieu en réalité, l'amortissement de l'excitateur très grand par rapport à celui du résonateur : ce sont des phénomènes dont le résonateur est lui-même le siège.

64. Discussion des expériences. — Quelle que soit l'explication qu'on puisse en donner, c'est un fait expérimental que le résonateur influe seul sur la longueur d'onde mesurée.

On a calculé la période T du résonateur, on a mesuré la longueur d'onde λ; on en déduit la vitesse de propagation :

$$V = \frac{\lambda}{T}.$$

Rappelons d'ailleurs que, ainsi qu'on l'a vu dans le chapitre précédent, dans les expériences antérieures à celle de M. Blondlot, la période T ne pouvait être calculée avec une grande approximation.

D'après la théorie, T et V doivent avoir une certaine valeur ; si ces valeurs satisfont à la relation précédente, on pourra en conclure que la théorie représente bien les phéno-

mènes, à moins qu'il n'y ait une double cause d'erreur, les deux erreurs se compensant.

Les expériences de Hertz et celles de MM. Sarasin et de la Rive ne peuvent servir à vérifier la théorie; en effet, voyons comment fonctionne leur résonateur. Il se compose (*fig.* 19) d'un fil circulaire portant à chacune de ses extrémités une petite sphère de faible capacité; une perturbation se propage suivant AMB, revient suivant BMA, etc., et c'est la superposition de ces différents mouvements qui produit la vibration observée. Si on néglige les capacités des deux petites sphères, il se produira un nœud à chaque extrémité, et la longueur du résonateur sera la moitié de la longueur d'onde, quelle que soit la vitesse de propagation.

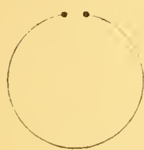


Fig. 19.

En réalité, la longueur d'onde est un peu plus grande que le double de la longueur du fil, par suite d'une cause troublante encore assez obscure et sur laquelle nous reviendrons; mais le résultat est indépendant de la valeur de la vitesse de propagation et ne peut servir à la mesurer.

65. Expériences de M. Blondlot [1]. — Le résonateur employé par M. Blondlot ne présente pas les inconvénients de celui de MM. Sarasin et de la Rive. C'est un véritable condensateur auquel on peut appliquer avec suffisamment d'exactitude la formule de Thomson.

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

M. Blondlot calculait L comme nous l'avons indiqué plus

[1] Blondlot, *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 549.

haut et mesurait la capacité C par une méthode balistique.

Il a constamment trouvé une concordance satisfaisante entre la vitesse de propagation mesurée et la vitesse de la lumière.

La formule de Thomson s'est trouvée vérifiée pour ces oscillations rapides, comme elle l'avait été par Feddersen dans le cas d'oscillations beaucoup plus lentes. Le coefficient numérique 2π ne pouvait être vérifié ; mais, les raisonnements qui nous ont servi à établir la formule de Thomson s'appuyant sur les définitions mêmes des quantités qui entrent en jeu, cette valeur du coefficient est très probable.

66. La disposition des fils employée par M. Blondlot était celle indiquée par la figure 20. Le résonateur est représenté par un simple rectangle, R′ et R″ désignant les deux points du fil situés en face du résonateur.

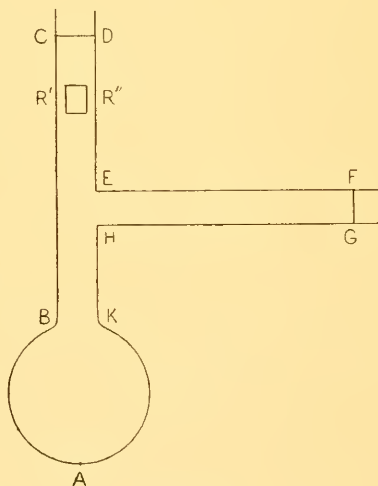


Fig. 20.

Nous avons vu (paragraphe 56) la disposition de l'excitateur ; le milieu de l'excitateur se trouve situé au point A de la figure et on peut supposer que c'est de là que part la perturbation.

Pour fermer le circuit, on se sert de deux ponts mobiles, CD et FG, le résonateur étant supposé fixe.

Nous désignerons par des lettres différentes longueurs de fil :

$$\text{longueur totale ABCDEFGHKA} = l$$
$$R'CDR'' = \alpha$$
$$ABR' = \beta$$
$$AKHGFER'' = \beta + \gamma.$$

On voit que l'on a :

$$l = \alpha + 2\beta + \gamma.$$

Supposons une perturbation partant de A ; elle parcourt d'abord le chemin $ABR' = \beta$, au bout duquel elle produit un premier effet sur le résonateur ; puis elle parcourt $R'CDR'' = \alpha$ et produit un deuxième effet sur le résonateur ; remarquons que cet effet s'ajoute au premier ; en effet, une perturbation d'un certain sens passant dans le fil en produit par induction une de sens contraire dans le résonateur, et les sens indiqués par les flèches (*fig.* 21) montrent que les deux perturbations produites dans le résonateur s'ajoutent.

Fig. 21.

Continuons à suivre la perturbation précédente : à partir de R″ elle parcourt la longueur totale l du fil et revient au résonateur ; on voit qu'elle revient au résonateur après avoir parcouru des chemins exprimés par :

$$\begin{array}{ll} \beta & \beta + \alpha \\ \beta + l & \beta + \alpha + l \\ \beta + 2l & \beta + \alpha + 2l \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

etc.

Suivons maintenant la perturbation qui se propage en sens contraire en partant de A. Elle impressionne le résonateur après avoir parcouru des chemins :

$$\begin{array}{ll} \beta + \gamma & \beta + \gamma + \alpha \\ \beta + \gamma + l & \beta + \gamma + \alpha + l \\ \beta + \gamma + 2l & \beta + \gamma + \alpha + 2l \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Supposons que, laissant toutes les autres longueurs fixes, on fasse varier α ; les actions sur le résonateur se détruiront deux à deux lorsqu'on aura :

$$\alpha = (2K + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Ainsi on aura un nœud ne dépendant que de α : on pourra déplacer le pont FG sans rien changer à la position de ce nœud, fait qui avait paru d'abord ne pas s'accorder avec la théorie de Hertz.

Si :

$$\alpha = 2K\frac{\lambda}{2},$$

le résonateur sera situé en un ventre. Ainsi, sans déplacer le résonateur, nous ferons varier l'intensité des étincelles en faisant varier α, cette intensité passant par des maxima et des minima.

Donnons à α une valeur qui correspond à un ventre et déplaçons le pont FG. Cela revient à faire varier seulement γ. Pour les valeurs de γ comprises dans la formule :

$$\gamma = (2K + 1)\frac{\lambda}{2}$$

les actions sur le résonateur se détruiront deux à deux ; en effet, la perturbation agissant après avoir parcouru le chemin $ABR' = \beta$ et celle agissant après avoir parcouru

$$AKHGFER'' = \beta + \gamma$$

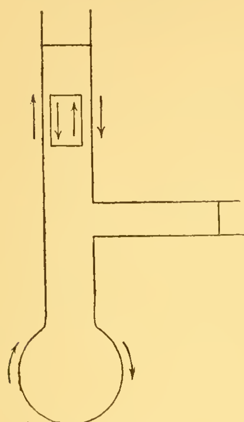


Fig. 22.

se détruiront, puisque d'une part on doit ajouter leurs effets, le sens de ces perturbations étant celui indiqué sur la figure 22, et que, d'autre part, ces effets sont de signes contraires, la différence des chemins parcourus étant un multiple impair de la demi-longueur d'onde.

Ainsi, la perturbation que nous désignerons pour abréger par le chemin parcouru β se détruit mutuellement avec la perturbation $\beta + \gamma$.

De même :

$$\begin{array}{lcl} \beta + l & \text{avec} & \beta + \gamma + l \\ \beta + 2l & \ldots\ldots & \beta + \gamma + 2l \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta + \alpha & \ldots\ldots & \beta + \gamma + \alpha \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Au contraire si :

$$\gamma = 2K \frac{\lambda}{2},$$

les oscillations s'ajouteront deux à deux : de là, une nouvelle série de maxima et de minima obtenus en faisant varier γ et qu'on ne peut pas observer quand α correspond à un nœud : ils seront le plus nets quand α correspondra à un ventre.

Si c'est la longueur totale l qui est un multiple impair de la demi-longueur d'onde, la perturbation ayant parcouru β aura son effet détruit par celle qui a parcouru $\beta + l$, et ainsi de suite. Là encore nous avons la source d'une série de maxima et de minima.

Voici ce qu'indique la théorie; l'expérience en confirme pleinement les résultats : les nœuds correspondant à

$$\alpha = (2K + 1)\frac{\lambda}{2}$$

sont très bien marqués; ceux qui correspondent à la variation de γ sont un peu moins nets; enfin ceux dont nous venons de parler en dernier lieu le sont encore moins, quoique correspondant bien à des valeurs de l rentrant dans la formule :

$$l = (2K + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Ce dernier résultat s'explique en supposant que la perturbation s'affaiblit en se propageant le long du fil : celle qui a parcouru un chemin β produit un effet plus considérable que celle qui a parcouru $\beta + l$ et ces deux effets ne peuvent plus se détruire entièrement.

67. Affaiblissement de la perturbation pendant sa propagation. — L'affaiblissement que nous venons de signaler est réel et tient à deux causes :

1° La perturbation revient à intervalles égaux à l'excitateur et lui communique une certaine quantité d'énergie par induction. Ceci a été vérifié par M. Blondlot.

2° Elle perd également de l'énergie le long du fil. M. Blondlot l'a vérifié de la façon suivante : il donne au fil la forme

représentée dans la figure 23, avec deux ponts mobiles FG et F′G′ ; il place d'abord les deux ponts symétriquement et à une grande distance de la branche centrale, et écarte les deux boules du micromètre du résonateur jusqu'à faire cesser les étincelles ; il rapproche ensuite les ponts en les maintenant symétriques, aussitôt les étincelles reparaissent. Puisque c'est seulement le chemin total qui a varié, c'est à la perte d'énergie le long de ce chemin qu'il faut attribuer l'absence d'étincelles lorsqu'il a une longueur considérable.

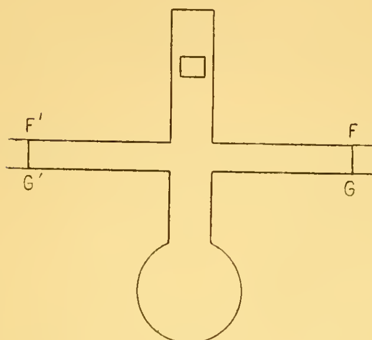


FIG. 23.

REMARQUES. — I. — Il ne faut pas confondre cet affaiblissement avec l'amortissement dont nous avons déjà parlé. Si ce nouvel affaiblissement n'avait pas lieu, on pourrait représenter l'intensité du courant qui circule dans le fil par l'expression :

$$Be.^{-\alpha(t-Az)}.\cos\beta(t - Az) + Ce^{-\alpha(t-Az)}\sin\beta(t-Az).$$

On tiendra compte de cet affaiblissement en remplaçant les constantes B et C par des fonctions décroissantes de z, par exemple par des fonctions exponentielles, sans que nous sachions si ce sont bien de telles fonctions qui représentent cet affaiblissement (¹).

(¹) De plus récentes expériences (*Vide infra*, n° 87, *h*) porteraient plutôt à penser que l'affaiblissement est beaucoup moins rapide.

On aurait alors une expression de la forme :

$$Be^{-\gamma z}.\, e^{-\alpha(t-Az)} \cos \beta\,(t-Az)+Ce^{-\gamma z}\, e^{-\alpha(t-Az)} \sin \beta\,(t-Az).$$

Ainsi il y a deux amortissements, que nous pouvons désigner par les noms d'amortissement de vibration et d'amortissement de propagation.

II. — M. Blondlot a employé aussi d'autres dispositions : toujours les résultats de ses expériences ont confirmé ses vues ; ainsi il a placé le résonateur de telle sorte qu'un seul des fils agisse sur lui ; pour cela le deuxième fil est placé non plus dans le plan du résonateur, mais en-dessous de ce plan, et à égale distance des deux côtés du résonateur qui lui sont parallèles. Dans ces conditions, le premier fil seul exerce une action sur le résonateur ; les seules perturbations actives, parmi celles que nous avons considérées précédemment, sont donc celles qui passent en R′. M. Blondlot a vérifié que la disposition des nœuds et des ventres est bien celle que les considérations précédentes permettent de prévoir.

Il serait curieux de placer le résonateur de manière à ce que son plan soit perpendiculaire à celui des deux fils, l'un de ses côtés se trouvant situé dans ce plan : les deux fils exerceraient alors leur action sur un même côté du résonateur, de sorte que les actions que nous considérions tout à l'heure et qui étaient de signes contraires, par exemple celles des perturbations ayant parcouru la première ABR′ et la deuxième ABCDR″, seraient maintenant de même signe ; les nœuds observés dans ce cas devraient correspondre aux ventres de nos premières expériences, et inversement.

III. — M. Blondlot a remarqué, comme on pouvait le pré-

voir, que *les dimensions de l'excitateur n'influaient pas sur la forme du phénomène, laquelle dépend seulement du résonateur ; mais elles influent sur l'intensité du phénomène:* lorsque la période propre de l'excitateur est voisine de celle du résonateur, les phénomènes sont bien plus nets et la vérification de la théorie devient plus facile ; M. Blondlot a d'ailleurs utilisé cette remarque.

68. Causes de l'affaiblissement pendant la propagation. — Nous avons vu tout à l'heure que, pendant la propagation d'une perturbation dans un fil, cette perturbation s'amortissait. L'énergie peut être dissipée de deux façons :

1° Sous forme de chaleur de Joule (*vide infra*) ; cette chaleur produite par les courants de conduction est localisée dans la couche superficielle du conducteur ; son effet sera donc d'autant plus sensible que le fil sera plus fin ;

2° Par rayonnement ; on peut calculer ce rayonnement, mais pour cela il nous faut reprendre et compléter la théorie de la propagation dans un fil.

Remarquons que la théorie de Hertz, que nous avons exposée, ne tient compte d'aucun des deux amortissements.

Principes du calcul. — Nous avons supposé qu'il existait une vitesse constante de propagation et qu'on pouvait considérer l'intensité du courant comme une fonction de $t - Az$; si cette hypothèse est fausse, elle devra nous conduire à une contradiction quelconque : par exemple, que les lignes de force n'aboutissent pas normalement au fil conducteur, ou bien qu'il n'y a pas conservation de l'énergie.

Le résultat du calcul est qu'il n'y a aucune contradiction

si l'on suppose infiniment petit le diamètre du fil : il n'y aurait donc pas d'amortissement pendant la propagation dans ce cas, du moins par rayonnement.

Si le diamètre du fil n'est plus infiniment petit le résultat du calcul serait qu'il n'y a plus conservation de l'énergie : alors il y aurait un amortissement. L'affaiblissement dû au rayonnement sera donc d'autant plus fort que le fil sera plus gros.

Remarquons bien que ce que nous venons de dire ne s'applique qu'à la perte d'énergie par rayonnement ; mais il faut tenir compte de la chaleur de Joule, que la théorie ne permet pas encore de bien connaître et qui est d'autant plus considérable que la résistance elle-même est plus grande, c'est-à-dire que le fil est plus fin.

Ainsi, quand on diminue la grosseur du fil, d'une part on diminue la perte d'énergie par rayonnement, mais d'autre part on augmente la chaleur de Joule. Le résultat sera qu'on aura un minimum de perte d'énergie pour un certain diamètre du fil, ce diamètre étant fort si la chaleur de Joule l'emporte sur le rayonnement, étant petit dans le cas contraire : les expériences de M. Pérot ont montré que ce dernier cas est très probablement le plus près de la vérité.

Nous allons étudier la question théoriquement, puis nous exposerons les expériences qui s'y rattachent.

69. Etude du champ produit par la propagation dans un fil. — Soit un fil cylindrique indéfini, dont nous supposerons le diamètre assez petit pour qu'on puisse l'assimiler à une droite que nous prendrons pour axe des z. Nous prendrons pour origine un point o sur le fil.

Soit dans l'espace un point quelconque M, de coordonnées xyz, et un point quelconque sur le fil, de coordonnées $oo\beta$ (*fig.* 24).

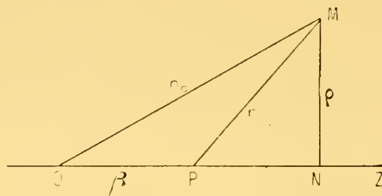


Fig. 24.

Nous désignerons par ρ la distance du point M au fil, par r sa distance au point P, par r_0 sa distance au point o. On aura les relations :

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$
$$r^2 = (\beta - z)^2 + \rho^2$$
$$r_0^2 = z^2 + \rho^2.$$

Désignons par i l'intensité du courant au point P à l'instant t, par i'' l'intensité en P au temps $t - r$A.

Les composantes ξ, η, ζ du vecteur auxiliaire auront les valeurs suivantes :

$$\xi = 0$$
$$\eta = 0,$$

puisque le courant est dirigé suivant oz seulement, et :

$$\zeta = - A \int \frac{i''.d\beta}{r}.$$

Supposons maintenant qu'une cause étrangère quelconque produise en o une perturbation que nous admettrons se propager le long du fil avec la vitesse de la lumière $V = \frac{1}{A}$.

On peut poser, en désignant par i_0 l'intensité du courant au point o :

$$i_0 = -\frac{1}{A} F(-Vt)$$

et la fonction F doit être considérée comme connue, puisque nous donnons la cause de la perturbation qui se produit en o.

D'après notre hypothèse, on aura :

$$i = -\frac{1}{A} F(\beta - Vt)$$

et :

$$i'' = -\frac{1}{A} F(\beta + r - Vt).$$

De là :

$$\zeta = +\int_0^\infty \frac{F(\beta + r - Vt)}{r} . d\beta$$

Transformons cette intégrale en posant :

$$\beta + r - Vt = \alpha.$$

De là on tire :

$$d\beta + dr = d\alpha.$$

D'ailleurs on a :

$$\frac{dr}{d\beta} = \frac{\beta - z}{r},$$

ce qui donne :

$$d\beta \frac{r + \beta - z}{r} = d\alpha.$$

On peut d'ailleurs écrire :

$$r + \beta - z = \alpha + Vt - z.$$

La limite inférieure de l'intégrale sera :

$$\alpha_0 = r_0 - Vt.$$

L'intégrale peut ainsi s'écrire :

$$\zeta = \int_{\alpha_0}^{+\infty} \frac{F(\alpha).\, d\alpha}{\alpha + Vt - z}$$

Appliquons maintenant nos équations générales ; elles deviennent ici :

$$\left\{\begin{array}{l} L = \dfrac{d\zeta}{dy} \\ M = -\dfrac{d\zeta}{dx} \\ N = 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dX}{dt} = -\dfrac{d^2\zeta}{dx.dz} \\ A\dfrac{dY}{dt} = -\dfrac{d^2\zeta}{dy.dz} \\ A\dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{d^2\zeta}{dx^2} + \dfrac{d^2\zeta}{dy^2}. \end{array}\right.$$

Par raison de symétrie, ζ n'est pas une fonction quelconque de x, y, z : c'est une fonction de z et de ρ ; la force magnétique, pour la même raison, est perpendiculaire au plan MON et sa grandeur est $\dfrac{d\zeta}{d\rho}$ d'après nos équations.

La force électrique doit être dans le plan MON; elle peut se décomposer en deux vecteurs, l'un R perpendiculaire à oz, et l'autre Z parallèle à oz. On a :

$$A\frac{dR}{dt} = -\frac{d^2\zeta}{d\rho.dz}.$$

D'autre part :

$$A\frac{dz}{dt}=\frac{d^2\zeta}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\zeta}{d\rho}$$

d'après un calcul bien connu.

Reportons-nous à la valeur de ζ ; ζ ne dépend de ρ que par la limite inférieure de l'intégrale, et on a :

$$\frac{d\zeta}{d\rho}=-\frac{F(\alpha_0)}{\alpha_0+Vt-z}\frac{d\alpha_0}{d\rho}.$$

De la valeur de α_0 on déduit :

$$\frac{d\alpha_0}{d\rho}=\frac{dr_0}{d\rho}=\frac{\rho}{r_0},$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\zeta}{d\rho}=-\frac{F(r_0-Vt)}{r_0-z}\frac{\rho}{r_0}.$$

Multiplions haut et bas le second membre par r_0+z ; il devient :

$$\frac{d\zeta}{d\rho}=-\frac{F(r_0-Vt)}{r_0^2-z^2}\frac{\rho(r_0+z)}{r_0}$$

$$=-\frac{F(r_0-Vt)}{\rho^2}\frac{\rho(r_0+z)}{r_0}$$

ou enfin :

$$\frac{d\zeta}{d\rho}=-\frac{F(r_0-Vt)}{\rho}\left(1+\frac{z}{r_0}\right).$$

De cette expression nous allons déduire la valeur des forces magnétique et électrique.

Supposons le point M très voisin de l'axe des z, c'est-à-dire du courant ; z diffère peu de r_0 et on peut donner à la

force magnétique la forme suivante :

$$\frac{d\zeta}{d\rho} = -\frac{2F(z - Vt)}{\rho},$$

ρ étant très petit. Puisque le point est très voisin de l'axe des z, la force magnétique est très grande ; de plus, la formule précédente exprime justement la loi de Biot et Savart, ce qui montre que la force magnétique est la même que si elle était due à un courant rectiligne et indéfini d'intensité constante, cette intensité étant celle du courant au point du fil le plus rapproché du point considéré.

D'ailleurs, on a :

$$A\frac{dR}{dt} = -\frac{d.}{dz}\left(\frac{d\zeta}{d\rho}\right) = \frac{2.F'(z - Vt)}{\rho}$$

et la composante R de la force électrique est infinie quand ρ diminue indéfiniment.

Cherchons ce que devient l'autre composante.

Nous pouvons écrire $\frac{d\zeta}{d\rho}$ de la façon suivante :

$$\frac{d\zeta}{d\rho} = \frac{\varphi(r_0)}{\rho}$$

d'où on tire :

$$\frac{d^2\zeta}{d\rho^2} = -\frac{\varphi(r_0)}{\rho^2} + \frac{\varphi'(r_0)}{\rho}\frac{dr_0}{d\rho}$$
$$= -\frac{\varphi(r_0)}{\rho^2} + \frac{\varphi'(r_0)}{\rho}\frac{\rho}{r_0}.$$

ce qui donne :

$$A\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d^2\zeta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\zeta}{d\rho} = \frac{\varphi'(r_0)}{r_0}.$$

ρ a disparu du dénominateur : la composante Z reste donc finie tandis que la composante R augmente indéfiniment, ce qui montre que la force électrique est normale au conducteur.

70. Cas où le diamètre du fil n'est pas infiniment petit. — Nous supposerons que le fil conducteur est un cylindre de rayon ρ_0 ; l'axe des z sera l'axe du cylindre ; le courant va se répartir sur la surface en une infinité de courants dirigés suivant les génératrices.

Soit un élément de la circonférence suivant laquelle la surface du fil est coupée par un plan perpendiculaire à l'axe. Désignons par :

$$f.ds.dt$$

la quantité d'électricité qui passe pendant le temps dt à travers cet élément ; la quantité totale d'électricité qui traverse la circonférence pendant le temps dt est :

$$2\pi\rho_0 f dt$$

et l'intensité du courant est :

$$i = 2\pi\rho_0 . f.$$

On peut calculer la force magnétique totale en un point voisin de la surface du cylindre par la composition des forces magnétiques élémentaires ; considérons une génératrice quelconque du cylindre ; la composante de la force magnétique due au courant qui la parcourt est sensiblement la même que celle qui serait due à un courant rectiligne et indéfini, d'intensité constante et égale à l'intensité au point de la génératrice le plus rapproché du point considéré ; dans

ces conditions, on démontre. que l'action résultante est la même que celle qui serait exercée si tout le courant était concentré sur l'axe : il en est de même pour la force électrique, qui se déduit de la force magnétique.

Pour un point situé très près de la surface, la force magnétique sera donc perpendiculaire au méridien qui passe par le point, et très grande, de l'ordre de $\frac{1}{\rho_0}$; des deux composantes de la force électrique, la composante R sera de l'ordre de $\frac{1}{\rho_0}$, c'est-à-dire très grande ; l'autre, Z, restera finie ; il en résulte que la direction de la force électrique sera très voisine de celle de la composante R, c'est-à-dire qu'elle fera avec la surface du conducteur un angle voisin de $\frac{\pi}{2}$; ce que nous avons dit jusqu'ici n'est donc qu'approché, puisque nous ne trouvons pas la force électrique rigoureusement normale à la surface du conducteur.

71. Considérons maintenant l'énergie totale E du système ; soit I l'intégrale de Poynting, c'est-à-dire l'intégrale calculée de la façon suivante : on multiplie chaque élément de la surface du conducteur par la composante normale du vecteur radiant, et on intègre, en étendant l'intégrale à toute la surface du fil.

D'après le théorème de Poynting, on a :

$$dE = I.dt,$$

c'est-à-dire que, pour maintenir l'intensité du courant constante, pour compenser l'affaiblissement par rayonnement, il faudrait fournir au système pendant le temps dt une quantité d'énergie égale à Idt.

Mais on ne fournit aucune quantité d'énergie : le courant va donc s'affaiblir. Posons :

$$\frac{I}{E} = 2\gamma.$$

Notre équation devient :

$$\frac{dE}{E} = 2\gamma . dt$$

ou :

$$E = E_0 \, e^{2\gamma t}$$

Soit c l'intensité du courant; l'énergie est proportionnelle au carré de cette intensité ; à cause de la perte d'énergie par rayonnement, l'intensité du courant va donc diminuer, et on aura :

$$c = c_0 \, e^{-\gamma t}.$$

Ainsi, la quantité qui mesure en somme l'affaiblissement du courant est γ.

Or on a :

$$2\gamma = \frac{I}{E}.$$

Cherchons l'ordre de grandeur de I et de E par rapport au rayon du fil. La composante du vecteur normale à la surface du fil pour expression :

$$\frac{F.Z}{4\pi A}$$

F désignant la force magnétique, et Z la composante de la force électrique parallèle à oz; nous avons vu que Z est finie,

et que F est de l'ordre de $\frac{1}{\rho_0}$; mais, d'autre part, il nous faut multiplier la quantité placée sous le signe $\int$ par un élément de la surface du fil pour calculer I; comme la surface du fil est de l'ordre de ρ_0, on voit que l'intégrale de Poynting est finie.

Quant à E, c'est l'intégrale d'une expression où figurent le carré de la force électrique et de celui de la force magnétique :

$$E = \int \frac{d\tau}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2),$$

l'intégrale étant étendue à tout le diélectrique; comme les forces électrique et magnétique sont près de la surface proportionnelles à $\frac{1}{\rho_0}$, on voit que l'énergie E est d'autant plus grande que le rayon du fil est petit.

Ainsi γ, et par suite l'affaiblissement par rayonnement, est d'autant plus faible que le fil est plus fin, comme nous l'avions annoncé.

72. Étude expérimentale des vibrations propres à l'excitateur. — Nous avons vu que, dans les expériences faites avec un résonateur, les résultats obtenus dépendent du résonateur. Si donc on veut étudier les vibrations propres à l'excitateur, il ne faudra pas se servir d'un résonateur. Un grand nombre d'expériences ont été faites dans ce sens : nous allons les exposer sans nous astreindre à suivre l'ordre chronologique.

73. Expériences de M. Pérot ([1]). — M. Pérot a adopté la disposition employée par M. Blondlot. Il mesurait la différence de potentiel entre deux points quelconques, D, E, du fil (*fig.* 25). Pour cela, entre ces deux points était établi un micromètre à étincelles; à chaque distance explosive correspond une certaine différence de potentiel entre les deux boules du micromètre. Le potentiel en chacun des deux points D et E étant fonction du temps, la différence de potentiel entre ces deux points variera et aura un maximum : si la distance des deux boules du micromètre est plus grande que la distance explosive qui correspond à ce maximum, il n'y aura pas d'étincelles; on diminuera cette distance jusqu'à obtenir des étincelles, et, lorsqu'on commencera à en obtenir, la distance correspondra au maximum de la différence de potentiel.

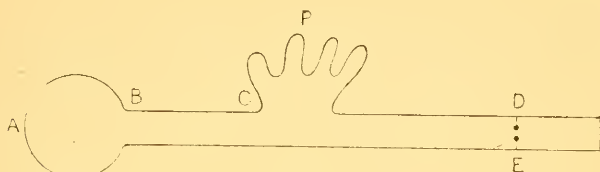


Fig. 25.

Les expériences auraient été compliquées par ce fait qu'il y a deux fils, d'où deux chemins pour les perturbations à partir du point A ; M. Pérot a évité cette complication en plaçant entre les points B et D un fil extrêmement long : la perturbation qui parcourt ce chemin arrive en D tellement affaiblie qu'elle n'a pas d'action sensible. On n'a donc à

[1] Pérot, *C. R.*, t. CXIV, p. 165.

s'occuper que de la perturbation qui parcourt le fil inférieur.

Le potentiel en E est une fonction du temps, soit F (t) ; le potentiel en D sera F $(t - h)$, en désignant par h le temps que la perturbation met à parcourir le chemin EMD, et en négligeant l'affaiblissement qui se produit le long de ce chemin.

Un pont mobile permet de faire varier le chemin EMD et, par suite, le temps h.

La différence de potentiel entre les deux points D et E est :

$$y = F(t) - F(t - h). \qquad (1)$$

On peut, en procédant comme nous l'avons indiqué, chercher la valeur maximum de y, qui correspond à chaque valeur de h ; ces valeurs maxima satisferont à :

$$\frac{dy}{dt} = F'(t) - F'(t - h) = 0. \qquad (2)$$

En éliminant t entre les équations (1) et (2) on obtiendrait la courbe des valeurs maxima de y en fonction de h.

Étudions seulement les ordonnées maxima et les minima de cette courbe : on aura pour ces points (même calcul qu'au paragraphe 62), à la fois :

$$F'(t) = 0$$
$$F'(t - h) = 0.$$

Supposons que la fonction F (t) soit de la forme :

$$F(t) = e^{-\alpha t} . \cos \beta (t + K).$$

En prenant la dérivée logarithmique des deux membres,

on obtient :

$$\frac{F'}{F} = -\alpha - \beta . \operatorname{tg} \beta (t + K),$$

d'où l'on déduit, puisque F′ est nul pour les points considérés :

$$\operatorname{tg} \beta (t + K) = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

La tangente reprenant la même valeur quand l'arc augmente de $n\pi$, les différents maxima de F (t) sont équidistants, leur distance étant une demi-période.

Les maxima et minima de y satisfont à la fois à

$$F'(t) = 0$$

et :

$$F'(t - h) = 0;$$

c'est-à-dire que h est un multiple de la demi-période.

Ainsi, la distance des maxima et des minima consécutifs de y est une demi-période.

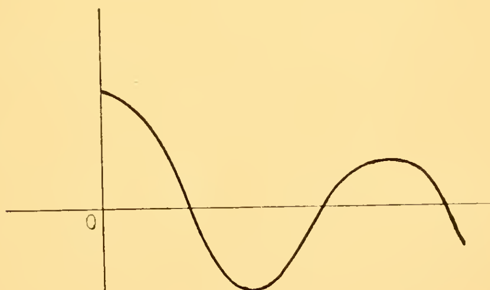


Fig. 26.

Ces résultats ont bien été vérifiés par l'expérience ; la courbe des valeurs de y en fonction de h a la forme indiquée par la figure 26, et les maxima et les minima, qui sont équi-

distants, ont bien été trouvés par l'expérience avec les valeurs calculées d'après la théorie.

74. Dans l'excitateur, on pouvait faire varier la distance des deux boules de l'interrupteur à étincelles ; la théorie montre que la période n'en doit pas être altérée, ce que l'expérience vérifie ; mais M. Pérot a constaté de plus que l'amortissement dépend de cette distance et que, contrairement à ce qu'on pourrait attendre, il augmente quand on rapproche les deux boules ; cet effet est dû probablement à la variation de la température de l'étincelle avec la distance explosive.

M. Pérot a étudié l'affaiblissement pendant la propagation en faisant varier la longueur et la grosseur du fil EE et en voyant comment variait la distance explosive. Il a constaté que l'amortissement est d'autant plus faible que le fil est plus fin, ce qui montrerait que la perte d'énergie par rayonnement l'emporte sur la perte d'énergie sous forme de chaleur de Joule. D'ailleurs, cet amortissement dépend aussi de la substance qui constitue le fil conducteur. Ainsi M. Pérot a trouvé qu'il est plus grand avec le fil de fer qu'avec un fil de cuivre de même diamètre.

Pour discuter complètement ces expériences sur l'affaiblissement il faudrait tenir compte de la réflexion qui se produit au point où le fil fin succède au fil gros. D'autres expérimentateurs ont trouvé pour cet affaiblissement des résultats différents. Cette question semble d'ailleurs de plus en plus obscure. Des expériences toutes récentes de M. Blondlot, dont nous rendons compte plus loin, n° 87, *g*, lui ont permis de transporter une perturbation jusqu'à une distance de 1 800 mètres sans un affaiblissement trop sensible ; il se ser-

vait, il est vrai, d'un fil de cuivre. Au contraire, avec un fil de fer très long BD, M. Pérot est parvenu, comme nous l'avons dit plus haut, à anéantir presque complètement celle de ces deux perturbations qui parcourt ce fil.

De nouvelles études sont nécessaires sur les lois de l'affaiblissement et le rôle de ce fil BD.

Nous revenons plus loin, n° 84 et suivants, sur la discussion des expériences de M. Pérot.

75. Jusqu'à présent, nous n'avons étudié expérimentalement les oscillations électriques qu'au moyen d'étincelles. On a employé aussi d'autres moyens, les uns fondés sur l'échauffement qu'éprouvent les conducteurs quand ils sont traversés par un courant alternatif, les autres sur des effets mécaniques.

Nous allons d'abord passer en revue ces différents procédés, puis nous décrirons les expériences les plus importantes auxquelles ils aient donné lieu.

76. Procédés thermiques. — Pour étudier l'échauffement des conducteurs, on peut employer différents moyens :

1° *Mesurer l'allongement qui en résulte ;*

2° *Mesurer la variation de leur résistance ;*

3° *Se servir de pinces thermo-électriques.*

I. — La mesure de l'allongement est peu précise, malgré les dispositions ingénieuses qui ont été employées. Aussi n'y insisterons-nous pas, non plus que sur les expériences où on a mis à profit le mouvement de l'air chaud dans un tube entourant le fil conducteur.

II. — La mesure de variation de la résistance donne de meilleurs résultats. C'est au moyen du bolomètre qu'on

opère : un pont de Wheatstone ordinaire a une de ses branches parcourue par le courant alternatif qu'on veut étudier (*fig.* 27). Supposons le galvanomètre G au zéro et commençons à faire passer les oscillations dans une partie de la branche AB′ par exemple : l'équilibre est détruit et le galvanomètre dévié.

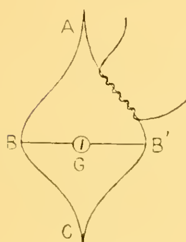


Fig. 27.

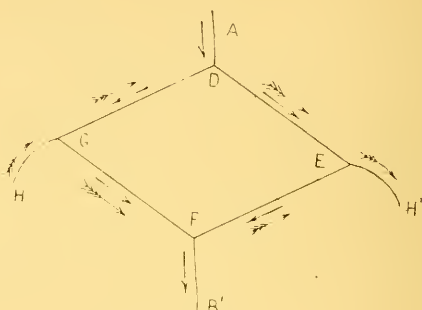


Fig. 28.

On a à considérer deux courants : le courant continu, qui sert à la mesure de la résistance, et le courant alternatif ; pour que ces courants ne se contrarient pas mutuellement, on emploie la disposition indiquée dans la figure 28. Sur la branche AB′ du pont est un parallélogramme, dont deux sommets communiquent avec les deux points A et B′ entre lesquels passe le courant continu ; les deux autres sommets communiquent avec deux points HH′ entre lesquels passe le courant alternatif. Le sens des courants est marqué sur la figure par des flèches.

Cette disposition ne paraît pas nécessaire : le courant alternatif passant dans le même fil que le courant continu s'ajouterait à un moment à ce courant, s'en retrancherait un moment après et il en résulterait une compensation suffisante.

III. — On fait parcourir au courant alternatif un fil fin, dans le voisinage duquel (à $\frac{1}{10}$ de millimètre environ) on dispose la pince thermo-électrique. Ce procédé est très sensible.

77. Procédés mécaniques. — Ils ont été employés pour la première fois par Hertz, qui utilisait deux dispositions différentes, l'une lui servant pour l'étude de la force électrique et l'autre pour celle de la force magnétique.

I. — Pour étudier la force électrique, on ne pouvait pas se servir de l'action des oscillations périodiques sur un petit objet électrisé : les effets produits par deux demi-périodes consécutives se seraient détruits mutuellement; ce qu'on aurait observé en somme n'aurait pas été X, mais $\int X dt$, qui est nulle.

Mais considérons un conducteur isolé et non chargé : il s'électrisera par influence. Pour un corps chargé d'une quantité d'électricité fixe m, on mesurerait :

$$\int m X dt = 0\,;$$

ici, la charge par influence est proportionnelle à la force X elle-même, de sorte que ce qu'on mesure est :

$$\int X^2 dt,$$

qui est une quantité différente de o.

Hertz plaçait dans le champ électrique (par exemple entre les deux fils conducteurs de son appareil) un conducteur ayant la forme d'un petit cylindre de révolution creux, cons-

titué par une feuille d'or repliée sur elle-même. L'appareil s'orientait dans le champ, et différents dispositifs, que nous ne décrirons pas, permettaient de mesurer la grandeur de la force électrique.

II. — M. Bjerknes s'est servi d'une autre disposition. Il emploie un électromètre à quadrants, auquel on n'a conservé que deux quadrants opposés. Ces quadrants sont mis respectivement en communication avec les deux extrémités d'un résonateur disposé, bien entendu, de façon à ne pas donner d'étincelles. L'aiguille de l'électromètre est isolée.

A un certain moment, l'aiguille va se charger par influence d'électricité positive à une de ses extrémités, d'électricité négative à l'autre ; les quadrants exercent sur elle une certaine action. Une demi-période après, le signe de la charge des quadrants a changé, mais l'électrisation par influence de l'aiguille a également changé de sens, de sorte que le sens de l'action n'a pas été changé.

III. — Pour mesurer la force magnétique, Hertz n'a pas pu, pas plus que pour la force électrique, se servir de l'action sur un pôle d'aimant, car ce qu'il aurait mesuré alors aurait été, en appelant m la masse magnétique de ce pôle :

$$\int m\mathrm{L}.dt = 0,$$

L étant la force magnétique.

Il n'a d'ailleurs pas pu se servir d'un morceau de fer doux aimanté par influence, parce que l'aimantation par influence n'aurait pas eu le temps de s'établir.

Il a employé les courants induits : un anneau conducteur est suspendu à un fil isolant et placé dans le champ ; il s'y

développe des courants induits qui changent de sens à chaque demi-période, comme la force magnétique elle-même et tendent toujours à orienter l'anneau dans la même direction.

78. Remarque. — Par les procédés thermiques et mécaniques, on ne mesure pas la même quantité que par l'observation des étincelles; en effet, cette dernière manière d'opérer indique le maximum de la différence de potentiel entre deux points.

Les procédés thermiques donnent en somme l'intégrale $\int i^2 dt$, étendue à toute la durée du courant.

Par les procédés mécaniques on mesure l'intégrale :

$$\int (V_1 - V_2)^2 \, dt,$$

V_1 et V_2 étant les potentiels des points avec lesquels communiquent les deux pôles de l'instrument de mesure, car l'effet produit est deux fois proportionnel à cette différence de potentiel, comme nous l'avons vu.

La quantité mesurée par les procédés thermiques ou mécaniques est donc à peu près la même.

Ces différents procédés peuvent d'ailleurs être appliqués soit au moyen d'un résonateur, soit avec un appareil analogue à celui de M. Pérot.

79. Expériences de M. Jones. — Il a employé un procédé thermique : son appareil était disposé comme celui de Hertz ; les deux fils, de très grande longueur, se terminaient brusquement.

En un point C de l'un d'eux, à une distance $AC = l$ de

l'extrémité du fil, était intercalée une pince thermo-électrique qui permettait de mesurer l'échauffement produit par le passage du courant (*fig.* 29).

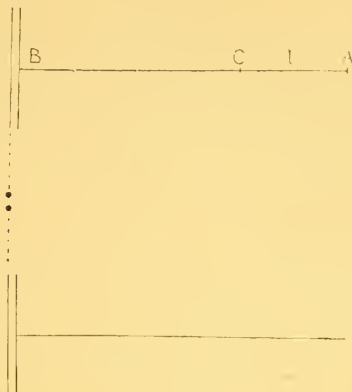


Fig. 29.

Cet échauffement variait avec la distance l; voyons comment, d'après la théorie, doit s'effectuer cette variation.

On mesure l'intégrale :

$$\int i^2 dt,$$

dans laquelle i représente la somme des courants direct et réfléchi.

Si on représente par :

$$F(t)$$

l'intensité du courant direct, comme la réflexion en A se produit avec changement de signe, l'intensité du courant réfléchi sera :

$$-F(t-h),$$

h étant le temps que la perturbation met à parcourir une distance $2l$.

On aura donc :

$$i = F(t) - F(t-h).$$

Prenons comme origine des temps le moment où la perturbation arrive au point C. Alors, pour toutes les valeurs

de t inférieures à o, la fonction F (t) sera nulle, puisqu'elle représente l'intensité du courant direct au point C.

D'ailleurs, on aura :

$$F(t-h) = o \quad \text{pour} \quad t < h.$$

Ce que nous avons dit déjà nous conduit à poser :

$$F(t) = B.e^{-\alpha t} \cos\beta\,(t + K).$$

Cherchons dans cette hypothèse la valeur de l'intégrale $\int i^2 dt$. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i^2.dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(t) - F(t-h)]^2\, dt.$$

Cette intégrale est la somme des trois autres et peut s'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t).\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t-h).\,dt - 2\int_{-\infty}^{+\infty} F(t).\,F(t-h).dt.$$

Or, nous savons que F (t) est nulle pour $t < o$, et F ($t - h$) pour $t < h$.

Ceci nous montre que, dans les intégrales précédentes, la quantité placée sous le signe $\int$ est nulle :

Pour la première, quand $t < o$;
Pour la deuxième, quand $t < h$;
Pour la troisième, quand $t < h$.

Nous pouvons donc changer les limites inférieures des intégrales et les écrire :

$$\int_0^{\infty} F^2(t).\,dt + \int_h^{\infty} F^2(t-h).\,dt - 2\int_h^{\infty} F(t).\,F(t-h).\,dt.$$

La quantité que l'on fait varier est h ; or la première intégrale est une constante par rapport à h ; il en est de même de la deuxième, qui, en posant $t = t' + h$, devient :

$$\int_0^{+\infty} F^2(t').\,dt'.$$

La troisième dépend de h ; nous allons chercher sa valeur en y remplaçant F (t) par l'expression que nous avons indiquée.

L'intégrale devient :

$$\int_h^{+\infty} B^2.e^{-\alpha t}\cos.\,\beta\,(t + K).\,e^{-\alpha(t-h)}\cos\beta\,(t + K - h).\,dt$$

ou :

$$\int_h^{+\infty} B^2.e^{-2\alpha t}.e^{\alpha h}.\,\frac{1}{2}\,[\cos\beta\,(2t + 2K - h) + \cos\beta h].dt.$$

Elle se divise alors en deux parties; le calcul de la première revient à l'intégration de :

$$\int e^{-2\alpha t}.\,\cos\beta\,(2t + 2K - h).\,dt\,;$$

la quantité sous le signe $\int$ est la partie réelle de :

$$e^{\gamma t + \delta}$$

où l'on a posé :

$$\gamma = -2\alpha + 2i\beta$$
$$\delta = (2K - h)\,\beta i.$$

Il suffira d'intégrer cette nouvelle fonction et de prendre la partie réelle du résultat.

Quant à la deuxième intégrale, le calcul en est encore plus simple.

On trouve en somme une expression de la forme :

$$\int i^2.dt = c^{te} + B'.e^{-\alpha' h}.\cos\beta'(h + K').$$

C'est bien ce qu'a trouvé M. Jones en faisant varier h : l'hypothèse que nous avons faite sur la forme de F (t) est ainsi vérifiée.

80. Expériences de M. Rubens [1]. — M. Rubens a employé également un procédé thermique, mais en se servant du bolomètre.

Un petit manchon de verre peut glisser le long de l'un des fils de l'appareil ; sur ce manchon est enroulé un fil conducteur dont l'autre extrémité vient s'enrouler autour d'un manchon semblable placé le long du second fil. Les armatures externes des deux manchons se chargent alternativement d'électricité positive et négative, et des oscillations parcourent le fil conducteur qui les joint. C'est ce fil qu'on intercale dans une des branches du pont de Wheatstone, comme nous l'avons vu plus haut.

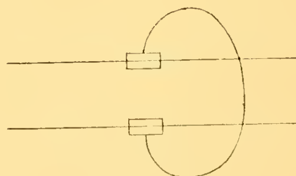


Fig. 30.

On a d'ailleurs vérifié que le courant circulant dans les deux fils de l'appareil n'est pas troublé par la présence des petits manchons de verre, en mettant en différents points des

[1] Consulter : Paalzow et Rubens, *Wied. Annalen*, t. XXXVII, p. 529. — *Lumière électrique*, t. XL, p. 189.

fils des manchons semblables; on comprend d'ailleurs qu'il en soit ainsi, car c'est seulement la capacité des petits condensateurs ainsi formés qui aurait pu influer sur la propagation du courant, et cette capacité est très faible.

M. Rubens a obtenu des résultats moins nets que ceux obtenus par M. Jones; celui-ci, en effet, employait des fils très longs et plaçait la pince thermo-électrique loin de l'excitateur; il pouvait ainsi négliger l'influence des réflexions se produisant du côté de l'excitateur; il n'en était pas ainsi dans les expériences de M. Rubens qui employait des fils beaucoup plus courts.

Comme M. Jones, M. Rubens a construit des courbes qu'il a vérifiées conformes aux résultats indiqués par la théorie.

81. Expériences de M. Bjerknes. — M. Bjerknes employait deux fils très longs, d'environ 150 mètres de longueur, se terminant brusquement. A un certain moment, deux points situés respectivement sur chaque fil, l'un en face de l'autre, sont à des potentiels $+ V$ et $- V$; ces deux points sont mis en communication avec les deux quadrants de l'électromètre. Ce qu'on mesure alors est :

$$\int V^2 . dt.$$

Dans l'évaluation de V il faut tenir compte du potentiel dû à l'onde directe et de celui dû à l'onde réfléchie; mais ces deux potentiels devront être ajoutés, parce que l'extrémité de chaque fil, étant un nœud pour l'intensité du courant, est un ventre pour le potentiel; si on réunissait les deux fils, comme M. Bjerknes l'a fait dans quelques expériences, on

devrait, au contraire, retrancher ces potentiels l'un de l'autre.

On aura donc :

$$V = F(t) + F(t - h).$$

Le calcul se conduirait exactement comme celui de $\int i^2.dt$, la quantité portée en ordonnée étant la déviation de l'électromètre.

On obtiendrait comme résultat du calcul une relation de la forme :

$$Y = c^{te} + B.e^{-\alpha' h}. \cos \beta' (h + K').$$

C'est bien ce qu'a obtenu par l'expérience M. Bjerknes, aux erreurs d'expériences près.

82. Conséquences de ces expériences. — *Toutes les expériences dont nous venons de parler, celles de MM. Pérot, Jones, Rubens, Bjerknes, vérifient l'hypothèse que la vibration émise par l'excitateur est une vibration pendulaire simple amortie.*

Ces expériences paraissent donc décider en faveur de la deuxième explication de la résonance multiple : MM. Sarasin et de la Rive pensaient, en effet, que l'excitateur émettait une vibration complexe, tandis que les expériences précédentes montrent que la vibration émise est simple. De plus, c'est une vibration amortie, comme nous l'avons supposé dans l'explication que nous avons donnée. Il restait à se rendre compte de l'amortissement du résonateur.

83. Etude de l'amortissement du résonateur. — M. Bjerknes (¹) a fait cette étude au moyen du dispositif que nous venons de décrire et de l'observation des étincelles.

(¹) Bjerknes, *Wied. Ann.*, t. XLIV, p. 74.

Soit V la différence de potentiel à un certain moment entre les deux extrémités d'un résonateur; on peut mettre ces extrémités en communication avec les boules d'un micromètre à étincelles, ou encore avec les quadrants d'un électromètre. Dans le premier cas on mesurera le maximum de V et, dans le second, on mesurera $\int V^2 . dt$. Ces deux séries d'expériences suffisent pour connaître à peu près l'amortissement.

Le potentiel V est supposé de la forme :

$$V = B . e^{-\alpha t} \cos \beta (t + K).$$

Pendant la première période, α étant petit, on aura sensiblement :

$$V = B . \cos \beta (t + K)$$

et le maximum de V, observé au moyen des étincelles, sera B.

Ainsi le micromètre à étincelles permet de mesurer B.

D'autre part, $e^{-\alpha t}$ varie pendant une période, de sorte que pendant chaque période on peut considérer la vibration comme ayant pour amplitude constante $Be^{-\alpha t_0}$, t_0 étant la valeur de t au début de la période. L'intégrale pendant une période sera alors :

$$B^2 e^{-2\alpha t_0} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\beta}} \cos^2 \beta (t + K) . dt$$

ou :

$$\frac{\pi}{\beta} B^2 e^{-2\alpha t_0}.$$

L'intégrale totale aura donc sensiblement la même valeur

que la suivante :

$$\int_0^\infty \frac{B^2}{2} e^{-2\alpha t} dt. = \frac{B^2}{4\alpha}.$$

Ainsi cette deuxième série d'expériences permet de calculer $\frac{B^2}{4\alpha}$; comme on connaît déjà B, on en déduira la valeur de α.

On pourrait objecter que, les deux séries d'expériences n'étant pas faites au même instant, la valeur du coefficient B n'est pas la même dans les deux cas ; aussi M. Bjerknes a-t-il entre-croisé les expériences et pris la moyenne des résultats.

Il a trouvé que l'amortissement du résonateur était environ cent fois plus faible que celui de l'excitateur ; tous les raisonnements que nous avons faits plus haut pour appuyer notre explication de la résonance multiple se trouvent donc ainsi justifiés, puisque nous avions supposé justement l'amortissement du résonateur très petit par rapport à celui de l'excitateur.

84. Etude du potentiel en un point du fil pendant la propagation. — Il peut être utile cependant de pousser plus loin la discussion de ces expériences ; pour cela il nous faut une théorie plus complète que je vais donner en peu de lignes.

Supposons qu'on emploie le procédé de M. Blondlot pour étudier la propagation d'une perturbation dans un fil conducteur. Nous allons chercher comment cette perturbation naît dans le fil et quelle est la valeur du potentiel en un point

du fil, en supposant que dans une portion AB du fil une cause quelconque produise une force électromotrice d'induction : ici AB est la région du fil qui se trouve à côté du fil de l'excitateur.



Fig. 31.

Nous allons nous servir d'équations que nous avons établies déjà (paragraphe 59) et que nous rappellerons rapidement.

Nous avions trouvé comme solution particulière de nos équations les fonctions F, G, H, F étant le potentiel dû à une matière attirante fictive dont la densité est égale à Au. On avait :

$$-X = A\frac{dF}{dt} + \frac{dV}{dx},$$

$$-Y = A\frac{dG}{dt} + \frac{dV}{dy},$$

$$-Z = A\frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dz},$$

V étant le potentiel dû à une matière attirante de densité ρ.

L'équation de continuité se réduit à :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

$A\dfrac{dV}{dt}$ étant le potentiel dû à une matière de densité $A\dfrac{d\rho}{dt}$. et

$\dfrac{dH}{dz}$ . . . . $A\dfrac{dw}{dz}$

on conclut de là que :

$$A\frac{dV}{dt} + \frac{dH}{dz} = 0. \qquad (1)$$

Nous avions écrit ensuite que la force électrique est nulle à l'intérieur du conducteur, d'où l'équation :

$$A \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dz} = 0$$

et de ces deux équations nous avions conclu que la vitesse de propagation est égale à celle de la lumière.

Mais, dans le cas présent, il nous faut tenir compte de la force électromotrice d'induction due à l'excitateur, qui peut être regardée comme une fonction donnée de z et de t, et cette dernière équation est remplacée par la suivante :

$$A \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dz} = \varphi(z,t). \qquad (2)$$

Remarquons que la force électromotrice que nous représentons par φ ne se fait sentir que dans la portion AB du fil, voisine de l'excitateur, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(z, t)$, que nous supposons connue, est nulle pour toute valeur de z non comprise entre o et l, en posant $AB = l$.

En ajoutant, puis retranchant membre à membre les équations (2) et (1), on obtient :

$$A \frac{d(V+H)}{dt} + \frac{d(V+H)}{dz} = \varphi(z,t).$$

$$A \frac{d(H-V)}{dt} - \frac{d(H-V)}{dz} = \varphi(z,t).$$

De ces deux équations linéaires on peut déduire les expressions de $V + H$ et $H - V$.

On trouve :

$$V + H = -\int_z^{+\infty} \varphi\,[u, t + A(u - z]. du.$$

Vérifions qu'on a bien là une solution.

De l'expression précédente on tire :

$$A.\frac{d(V+H)}{dt} = -A\int_z^{+\infty}\frac{d\varphi}{dt}.du$$

et :

$$\frac{d(V+H)}{dz} = +A\int_z^{+\infty}\frac{d\varphi}{dt}du + \varphi[u, t+A(u-z)] \text{ pour } u = z.$$

ce qu'on peut écrire :

$$\frac{d(V+H)}{dz} = +A\int_z^{+\infty}\frac{d\varphi}{dt}du + \varphi(z, t)$$

En remplaçant dans l'équation linéaire en $V + H$ les dérivées $\frac{d(V+H)}{dt}$ et $\frac{d(V+H)}{dz}$ par les valeurs précédentes, l'équation se trouve bien vérifiée.

On aurait $H - V$ en changeant dans l'expression précédente z en $-z$. Cherchons les valeurs de $V + H$ et $H - V$ pour un point situé à gauche de A, c'est-à-dire dont l'abscisse z est négative.

Puisque φ est nulle pour toutes les valeurs de z non comprises dans l'intervalle $AB = l$, la fonction φ placée sous le signe $\int$ sera nulle quand u variera de z à 0, et de l à $+\infty$. Il restera donc :

$$V + H = -\int_0^l \varphi[u, t + (u - z)A]\, du$$

En supposant que l soit très petit, on pourra réduire l'in-

tégrale à un élément, et, en posant $u = \theta l$, on aura :

$$V + H = -l\varphi\,[\theta l,\, t + (\theta l - z)\,A],$$

c'est-à-dire que $V + H$ est une fonction de $t - zA$.

On calculerait de même $V - H$ et on trouverait pour un point situé à gauche de A :

$$V - H = 0.$$

Il en résulte que:

$$V = -\frac{l}{2}\varphi,$$

c'est-à-dire que les variations de V se font comme celles de φ.

Pour un point situé à droite du point B, on trouverait un résultat analogue : $V + H$ serait nul, et $V - H$ une fonction de $t + zA$.

Conséquences. — Le courant qui a lieu dans l'excitateur est représenté par la première courbe de la figure 32. Il est nul tant que l'étincelle n'a pas éclaté entre les deux extrémités de l'interrupteur ; puis il part de o, croît jusqu'à un certain maximum et éprouve ensuite des oscillations périodiques décroissantes.

La force électromotrice d'induction due à l'excitateur, c'est-à-dire en somme la fonction φ, est proportionnelle à $\frac{di}{dt}$. Ayant construit la courbe qui représente les variations de $\frac{di}{dt}$, nous avons par là même les variations du potentiel V en un point du fil : il part de 0, atteint rapidement un maximum, puis éprouve des oscillations périodiques décroissantes.

85. Résultats expérimentaux. — Nous venons de voir ce que la théorie nous indique relativement aux variations du potentiel. Ce résultat est-il vérifié par l'expérience ?

Revenons aux expériences de M. Pérot. Soit :

$$V = F(t)$$

le potentiel au premier des deux points qu'il réunit aux extrémités d'un micromètre à étincelles, et

$$V = F(t - h)$$

le potentiel au second de ces points.

Pour que l'étincelle éclate, il faut que pour une certaine valeur de t la différence $F(t) - F(t - h)$ soit plus grande en valeur absolue qu'une certaine limite dépendant de la distance des deux bornes entre lesquelles l'étincelle doit éclater. (*Vide supra*, n° 62.)

Mais une remarque importante doit être faite. Le micromètre à étincelles de M. Pérot n'était pas symétrique, l'étincelle éclatait entre une pointe et un plan métalliques. On peut se demander si dans ces conditions elle éclatera aussi facilement dans les deux sens ; ou si, au contraire, la différence de potentiel qui déterminera la décharge disruptive ne sera pas plus grande quand la pointe est chargée négativement et le plan positivement que dans le cas contraire.

Si alors $F(t)$ est le potentiel de la pointe et $F(t - h)$ celui du plan, la condition pour que l'étincelle éclate, c'est que l'on ait :

$$F(t) - F(t - h) > \alpha$$

ou :

$$F(t) - F(t - h) < -\beta ;$$

α et β sont deux nombres positifs qui dépendent de la distance explosive. Mais on n'a pas forcément $\alpha = \beta$.

Si l'on suppose $\alpha = \beta$, ce qu'on déterminera dans les expériences, en mesurant la longueur de l'étincelle, c'est le maximum de la valeur absolue de $F(t) - F(t-h)$ que je désignerai suivant l'usage par la notation :

$$|F(t) - F(t-h)|.$$

Si l'on suppose au contraire β, par exemple, très petit par rapport à α, ce qu'on déterminera, ce sera le maximum de :

$$F(t-h) - F(t). \qquad (1)$$

M. Pérot construit une courbe en prenant pour abscisses les valeurs de h et pour ordonnées les différences de potentiel H correspondant aux longueurs d'étincelle observées.

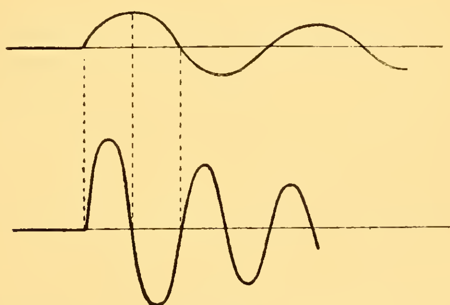


Fig. 32.

La courbe $V = F(t)$ a la forme indiquée par la figure 32 ; si on prend comme origine du temps le moment où la perturbation arrive au premier point, on a :

$$F(t) = 0 \text{ pour } t < 0.$$

De même on a:

$$F(t-h) = o \text{ pour } t < h$$

Avant l'instant $t = h$, l'expression $F(t) - F(t-h)$ se réduira à $F(t)$, et, dans cet intervalle, le maximum de cette valeur absolue sera :

$$|F(t_0)|,$$

t_0 étant la valeur de t qui correspond au plus grand maximum. Mais, en se reportant à la figure 32, on verra que $F(t)$ atteint presque immédiatement son maximum absolu, de sorte que nous aurons :

$$|F(t_0)| = F(t_0).$$

Après l'instant $t = h$, la différence de potentiel est :

$$F(t) - F(t-h).$$

Soit alors $\varphi(h)$ la plus grande valeur que puisse prendre $F(t) - F(t-h)$ pour une valeur de t plus grande que h, et $\psi(h)$ la plus grande valeur que puisse prendre $F(t-h) - F(t)$. Pour qu'il y ait étincelle, il suffit qu'une des trois conditions suivantes soit remplie :

$$\varphi(h) > \alpha, \ \psi(h) > \beta, \ F(t_0) > \alpha.$$

Si le micromètre était symétrique et si l'on avait $\alpha = \beta$, on devrait, en construisant la courbe de M. Pérot, c'est-à-dire en prenant h pour abscisse et H pour ordonnée, obtenir la courbe qui a pour équation :

$$H = \theta(h),$$

$\theta(h)$ étant la plus grande des trois quantités $F(t_0)$, $\varphi(h)$ et

$\psi(h)$. On obtiendra les maxima et les minima des fonctions $\varphi(h)$ et $\psi(h)$ de la manière suivante. La fonction F (t), comme nous l'avons vu plus haut, présente une série de maxima et de minima équidistants. Soit δ cette équidistance ; t_0, $t_0 + 2\delta$, $t_0 + 4\delta$ les valeurs de t qui correspondent aux maxima de F (t) et $t_0 + \delta$, $t_0 + 3\delta$ celles qui correspondent aux minima.

D'après ce que nous avons vu plus haut (n° 62), pour que $\varphi(h)$ ou $\psi(h)$ présente un maximum ou un minimum, il faut que :

$$F'(t) = F'(t - h) = 0.$$

La quantité h devra donc être un multiple de δ; $\varphi(h)$ (pour les valeurs de h qui correspondent à un maximum ou à un minimum) sera la plus grande des quantités :

$$(2) \qquad F(t_0 + h + m\delta) - F(t_0 + m\delta) \qquad (m \text{ entier})$$

et $\psi(h)$ la plus grande des quantités.

$$(3) \qquad F(t_0 + m\delta) - F(t_0 + h + m\delta).$$

Mais, à cause de l'amortissement, on aura pour $t > 0$:

$$F(t + \delta) = -\mu F(t),$$

μ étant une constante positive et plus petite que 1. Quand m augmentera d'une unité, les expressions (2) et (3) seront multipliées par $-\mu$; elles changeront de signe et leur valeur absolue diminuera. L'expression (2) est *positive* pour m impair et l'expression (3) pour m pair.

On obtiendra donc $\varphi(h)$ en faisant $m = 1$ dans (2) et $\psi(h)$

en faisant $m = o$ dans (3). D'où :

$$\varphi(h) = \mu\psi(h) < \psi(h)$$
$$\psi(h) = F(t_0) - F(t_0 + h).$$

On aura alors pour $\psi(h)$ un minimum si $\frac{h}{\delta}$ est pair et un maximum si $\frac{h}{\delta}$ est impair.

Si $\frac{h}{\delta}$ est pair, $F(t_0 - h)$ est positif et :

$$\psi(h) < F(t_0).$$

Si $\frac{h}{\delta}$ est impair, $F(t_0 - h)$ est négatif et :

$$\psi(h) > F(t_0).$$

Ainsi la constante $F(t_0)$ est plus petite que les maxima de $\psi(h)$, mais plus grande que ses minima.

Il résulte de là que $\theta(h)$ est égal tantôt à $\psi(h)$, tantôt à $F(t_0)$, mais jamais à $\varphi(h)$.

Comme $F(t_0)$ est une constante, la courbe

$$H = \theta(h)$$

se composerait de parties curvilignes raccordées par des parties rectilignes.

Si donc le micromètre était symétrique, M. Pérot aurait dû obtenir une courbe analogue à celle de la figure 34.

Si, au contraire, on suppose que β est très petit devant α la courbe obtenue doit être la courbe :

$$H = \psi(h)$$

et présenter une forme analogue à celle de la figure 33 partie supérieure. C'est bien ce que trouve M. Pérot.

Il semble donc que, dans les expériences de M. Pérot, l'étincelle ne jaillirait que dans un des sens, et non pas indifféremment dans les deux sens.

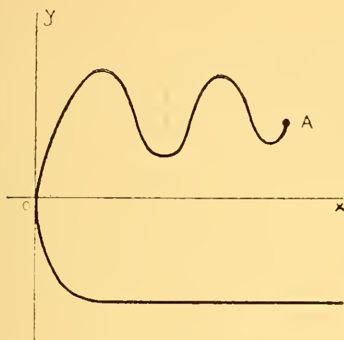


Fig. 33.

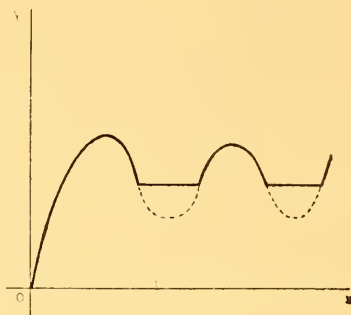


Fig. 34.

Lorsqu'on charge un excitateur au moyen d'une bobine de Ruhmkorff, des oscillations naissent au moment du courant de rupture. Puis, après un certain temps se produit le courant de fermeture, qui peut dans certaines circonstances donner lieu à de nouvelles oscillations, dont la première est de sens différent de celui de la première des oscillations précédentes. Cela ne pouvait avoir lieu dans les expériences de M. Pérot, qui se servait d'une machine de Holz, donnant lieu à des oscillations dont la première est toujours de même sens. D'ailleurs, son micromètre à étincelles n'était pas symétrique : les étincelles jaillissaient entre une pointe et une petite surface plane. Tout porte donc à penser que les étincelles ne jaillissent que dans un sens.

Dans quelques expériences inédites, M. Pérot a vérifié

cette dissymétrie et, en intervertissant ses communications, il a trouvé un fragment de droite.

86. Expériences de M. Birkland. — M. Birkland a fait des expériences pour étudier la variation du potentiel et il a obtenu la courbe théorique de la figure 34, comprenant des fragments de droite.

Les fils de M. Birkland étaient relativement courts et coupés à leur extrémité où se produisait une réflexion.

Le potentiel en un point avait alors pour expression :

$$F(t) + F(t - h),$$

$F(t)$ étant le potentiel dû à l'onde directe, et $F(t - h)$ le potentiel dû à l'onde réfléchie.

On mesure la différence du potentiel d'un point du fil soit avec un point du sol, soit avec un point de l'autre fil. Pour cela, on met ces deux points en communication par un conducteur interrompu par un micromètre à étincelles. Comme les étincelles seraient trop courtes pour être observées à l'œil, on les observe à l'oreille à l'aide d'un téléphone.

De plus, les expériences de M. Birkland ont montré que la réflexion à l'extrémité du fil se faisait avec une perte d'énergie assez considérable et que, le potentiel dû à l'onde directe étant représenté par :

$$V = F(t),$$

le potentiel dû à l'onde réfléchie est :

$$V = \beta . F(t - h),$$

β étant un coefficient inférieur à l'unité.

Cette perte d'énergie dans la réflexion semble pour le moment assez difficile à expliquer ; de nouvelles études sont nécessaires pour éclaircir ce point obscur.

87. Cette étude de la propagation dans les fils ne nous permet pas encore de prononcer entre la théorie de Maxwell et les anciennes théories. Nous avons vu, en effet, que la vitesse de propagation doit être, dans les anciennes théories comme dans les nouvelles, égale à celle de la lumière. C'est l'étude de la propagation dans l'air, que nous allons aborder maintenant, qui a permis de décider : la propagation ne se fait pas avec une vitesse infinie, comme le faisaient prévoir les anciennes théories.

COMPLÉMENT AU CHAPITRE IV

Depuis que ce cours a été professé, diverses expériences ont été faites et je serai obligé d'ajouter de temps en temps quelques lignes complémentaires pour faire connaître au lecteur l'état actuel de la science ; c'est ainsi que je ne puis passer sous silence les belles expériences de M. Blondlot sur la propagation de l'électricité.

87 *a*. Premières expériences. — Nous avons vu plus haut les raisons qui ont porté les physiciens à penser que les ondulations hertziennes doivent se propager dans un fil métallique avec une vitesse égale à celle de la lumière. La vitesse de propagation est le quotient de la longueur d'onde par la période. La longueur d'onde a été mesurée, et la période *calculée* en admettant la formule de sir W. Thomson. Le quotient obtenu est égal à la vitesse de la lumière ; mais ce résultat, auquel on est parvenu ainsi indirectement, ne comporte pas le même degré de certitude que présenterait une mesure directe. On peut se demander, en effet, si la formule de Thomson, déduite exclusivement de considérations théoriques, est suffisamment démontrée et des expériences directes étaient nécessaires.

Depuis longtemps d'ailleurs on s'était préoccupé de mesu-

rer la vitesse de l'électricité. En 1834, Wheatstone avait trouvé, à l'aide d'un miroir tournant, une vitesse de 460 000 kilomètres; et, en 1849, l'Américain Walker avait trouvé 30 000 kilomètres. Mais ces expériences, dont les résultats sont si extraordinairement divergents, avaient donné lieu, surtout celles de Walker, à diverses objections qui nécessitaient de nouvelles études.

87 *b*. Expériences de MM. Fizeau et Gounelle. — Les expériences de MM. Fizeau et Gounelle ont été faites, en 1850, sur la ligne de Paris à Amiens longue de 314 kilomètres et faite entièrement en fil de fer, et sur celle de Paris à Rouen, longue de 288 kilomètres et faite en partie de fil de fer, en partie de fil de cuivre. La méthode était fondée sur le même principe que le procédé célèbre de M. Fizeau pour la mesure de la vitesse de la lumière.

Une roue de bois, qui tournait avec une grande rapidité, avait sa circonférence divisée en trente-six secteurs alternativement en platine et en bois. Deux fils, terminés chacun par un balai métallique qui frottait sur la circonférence de cette roue, pouvaient ainsi être alternativement mis en communication métallique ou isolés l'un de l'autre. Il y avait ainsi trois paires de balais disposés comme je vais l'expliquer.

L'un des pôles de la pile était en communication avec la terre et l'autre avec un premier fil AB terminé par le balai B. Nous avions encore le fil de ligne CDEE′ allant du balai C à l'extrémité D de la ligne et revenant ensuite aux deux balais E et E′, il y avait enfin deux fils FG, F′G′, mettant en communication les balais F et F′ avec la terre.

Les secteurs de la roue pouvaient mettre en communication B avec C, E avec F, E′ avec F′, et la disposition était telle que les communications BC et EF étaient ouvertes et fermées en même temps, et que la communication E′F′ était au contraire fermée quand les deux autres étaient ouvertes et inversement.

Voyons d'abord ce qui devrait se passer si l'électricité se propageait avec une vitesse parfaitement définie comme la lumière ou le son. Appelons *période* l'intervalle de temps qui s'écoule entre le moment où un des balais entre en contact avec un des secteurs et celui où ce contact cesse, c'est-à-dire la trente-sixième partie de la durée d'un tour complet de la roue. Cette période sera d'autant plus courte que la rotation sera plus rapide.

Supposons que la durée T de la propagation le long de la ligne CDE soit égale à un nombre pair de périodes. L'électricité venue de la pile passera de B en C au moment où la communication BC sera ouverte, elle parcourra la ligne et arrivera au bout d'un temps T en E et en E′. A ce moment, la communication EF sera ouverte et la communication E′F′ sera fermée et le courant passera dans le fil FG.

Si, au contraire, T était égal à un nombre impair de périodes, l'électricité en arrivant en E et E′ trouverait EF fermée et E′F′ ouverte, et le courant passerait dans le fil F′G′.

Ainsi la vitesse de rotation pourrait être telle que le courant passât tout entier dans FG ou tout entier dans F′G′. Pour des vitesses intermédiaires le courant se partagerait en proportions inégales entre les deux fils.

Les deux fils FG et F′G′ s'enroulaient autour d'un galva-

nomètre différentiel, sur lequel ils exerçaient une action de sens contraire, et l'observation de ce galvanomètre permettait de discerner si l'intensité moyenne dans FG l'emportait sur l'intensité moyenne dans F′G′.

On pouvait ainsi voir quelle devrait être la vitesse de rotation pour que T fût égal à un multiple donné de la période. On pouvait donc mesurer T et, par conséquent, la vitesse de propagation.

Diverses circonstances, sur lesquelles nous reviendrons plus loin, venaient compliquer les phénomènes et il en résultait que le courant dans FG (ou dans F′G′) ne s'annulait jamais et présentait seulement une alternance de maxima et de minima dont les premiers étaient seuls observables.

Les dispositions expérimentales ont été variées d'un très grand nombre de manières ; je n'en ai décrit qu'une afin de ne pas trop m'étendre ; je voudrais seulement expliquer la raison qui a amené l'illustre physicien à employer un second fil F′G′. Si la communication EF avait été fermée périodiquement sans qu'on ouvrît un autre chemin à l'électricité, il se serait produit des réflexions qui auraient troublé les phénomènes.

Les observations de MM. Fizeau et Gounelle ont donné 100 000 kilomètres pour la vitesse dans le fer et 180 000 kilomètres pour la vitesse dans le cuivre.

87 *c*. Diffusion du courant. — J'ai dit tout à l'heure que le courant FG ne s'annule jamais, ainsi que cela devait arriver si l'électricité se propageait avec une vitesse parfaitement déterminée. Tout se passe comme si la perturbation s'es-

tompait en se propageant de façon à occuper plus d'étendue sur le fil à l'arrivée qu'au départ. Ce phénomène, mis hors de doute par les expériences de M. Fizeau, a été appelé par ce physicien la diffusion du courant.

87 *d*. Explication de la diffusion. — Il est probable que cette diffusion est due à la résistance ohmique dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'ici. Voyons comment nos équations sont modifiées par cette résistance. Nous avons trouvé (nº 84) l'équation suivante :

$$A\frac{dV}{dt}+\frac{dH}{dz}=0,$$

qui est une conséquence de l'équation de continuité et qui par conséquent subsiste. Nous avons écrit ensuite que la force électrique est nulle à l'intérieur du conducteur, et nous avons regardé cette force comme formée de deux termes ; le terme $A\frac{dH}{dt}$ représentant l'induction et le terme $\frac{dV}{dz}$ représentant la force d'origine électrostatique. Il faudrait y adjoindre une autre force représentant la résistance ohmique ; cette force est proportionnelle à l'intensité du courant, c'est-à-dire à w, ou sensiblement proportionnelle à H si le rayon du fil est assez petit. Notre seconde équation devient donc :

$$A\frac{dH}{dt}+\frac{dV}{dz}=\beta H \qquad (\beta < 0).$$

En différentiant la première par rapport à t, la seconde

par rapport à z, on trouve :

$$A \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{d^2H}{dzdt} = 0$$

$$A \frac{d^2H}{dzdt} + \frac{d^2V}{dz^2} = \beta \frac{dH}{dz},$$

d'où :

$$\frac{d^2V}{dz^2} = A^2 \frac{d^2V}{dt^2} - A\beta \frac{dV}{dt}$$

Nous pouvons donc représenter les variations du potentiel électrique dans un fil qui transmet une perturbation électrique par l'équation :

$$A \frac{d^2V}{dt^2} + 2B \frac{dV}{dt} = C \frac{d^2V}{dx^2},$$

qui est connue sous le nom d'*équation des télégraphistes*. A, B, C sont des constantes ; le premier terme provient de la self-induction, le second de la résistance ohmique, le second membre de la capacité du fil.

On peut, en choisissant convenablement les unités, réduire l'équation à la forme :

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2 \frac{dV}{dt} = \frac{d^2V}{dx^2}.$$

L'unité de vitesse est alors la vitesse de la lumière. Si l'on pose :

$$V = Ue^{-t},$$

l'équation devient :

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{dx^2} + U. \tag{1}$$

Pour que le problème soit déterminé, il faut que l'on se donne les conditions initiales ; je suppose donc que, pour $t = o$, U se réduit à une fonction donnée $f(x)$, que je mettrai sous la forme d'une intégrale de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q)\, e^{iqx} dq,$$

et que $\frac{dU}{dt}$, pour $t = o$, se réduit à une fonction donnée :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_1(q)\, e^{ixq} dq.$$

Je puis alors mettre l'intégrale de (1) sous la forme :

$$(2)\quad U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx} \left[\theta \cos t\sqrt{q^2-1} + \theta_1 \frac{\sin t\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q^2-1}} \right] dq,$$

ou bien :

$$(3)\quad U = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{i[qx + t\sqrt{q^2-1}]} dq + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{i[qx - t\sqrt{q^2-1}]} dq,$$

où :

$$\alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta_1}{2i\sqrt{q^2-1}}, \qquad \beta = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta_1}{2i\sqrt{q^2-1}}.$$

Supposons d'abord :

$$\theta = o, \qquad \theta_1 = 1$$

et :

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx} \frac{\sin t\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q^2-1}} dq = \int \frac{e^{i[qx+t\sqrt{q^2-1}]}}{2i\sqrt{q^2-1}} dq - \int \frac{e^{i[qx-t\sqrt{q^2-1}]}}{2i\sqrt{q^2-1}} dq.$$

Les deux intégrales du troisième membre doivent être

prises le long d'un chemin allant de $-\infty$ à $+\infty$, mais passant au-dessus de l'axe des quantités réelles, de façon à éviter les points singuliers $q = \pm 1$.

La théorie des intégrales imaginaires de Cauchy montre que la première intégrale du troisième membre est égale à o pour $x + t < 0$ et à :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi} e^{t\sin\varphi} d\varphi = \Lambda(x, t)$$

pour $x + t < 0$.

De même la seconde intégrale est égale à o pour $x - t > 0$ et à $\Lambda(x, t)$ pour $x - t < 0$.

On a donc :

$$\begin{aligned} U &= 0 \text{ pour } & x &> t, \\ U &= \Lambda \text{ pour } & t > x &> -t, \\ U &= 0 \text{ pour } & x &< -t, \end{aligned}$$

On trouve d'ailleurs aisément

$$\Lambda(x, t) = n \sum \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{(x^2 - t^2)^n}{(n!)^2} = \pi J_0\left(\sqrt{x^2 - t^2}\right),$$

J_0 étant la fonction de Bessel.

Soit maintenant $\theta = 0$, mais θ_1 quelconque ; ou, ce qui revient au même, f nul et f_1 quelconque ; nous supposerons toutefois que f_1 est nul pour $x > a$ et $x < b$ et différent de o quand x est compris entre b et a.

On a alors :

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_1 e^{iqx} \frac{\sin t\sqrt{q^2 - 1}}{\sqrt{q^2 - 1}} dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz f_1(z)}{2\pi} K,$$

où l'on a posé :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iq(x-z)} \sin t\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q^2-1}} dq.$$

On voit que :

$$K = 0 \text{ pour } z > x + t, \text{ ou } z < x - t$$

et :

$$K = \pi J_0 \left(\sqrt{(x-z)^2 - t^2}\right) \text{ pour } x + t > z > x - t.$$

Comme, d'autre part, f_1 est nul sauf entre b et a, nous aurons $\left(\text{si } t > \dfrac{a-b}{2}\right)$ cinq hypothèses à distinguer :

$$(4) \left\{ \begin{array}{ll} 1^\circ & x > a + t, \ U = 0, \\ 2^\circ & a + t > x > b + t, \ U = \displaystyle\int_{x-t}^{a} \frac{f_1(z)}{2} J_0 \left(\sqrt{(x-z)^2 - t^2}\right) dz \\ 3^\circ & b + t > x > a - t, \ U = \displaystyle\int_{b}^{a} \frac{f_1(z)}{2} J_0 dz, \\ 4^\circ & a - t > x > b - t, \ U = \displaystyle\int_{b}^{x+t} \frac{f_1(z)}{2} J_0 dz, \\ 5^\circ & b - t > x, \ U = 0. \end{array} \right.$$

Soit maintenant f_1 nul ; et f différent de 0 entre b et a, mais nul encore pour $x > a$ ou $x < b$. Il vient :

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \cos t \sqrt{q^2 - 1} dq,$$

de sorte que, pour passer du cas précédent à celui-ci, il suffit de changer θ_1 en θ (et f_1 en f), et de différencier par

rapport à t. On trouve ainsi dans nos cinq hypothèses :

$$(5)\begin{cases} 1^\circ & x > a + t, & U = 0, \\ 2^\circ & a + t > x > b + t, & U = \displaystyle\int_{x-t}^{a} \frac{f}{2}\frac{dJ_0}{dt}\,dz + \frac{f(x-t)}{2}, \\ 3^\circ & b + t > x > a - t, & U = \displaystyle\int_{b}^{a} \frac{f}{2}\frac{dJ_0}{dt}\,dz, \\ 4^\circ & a - t > x > b - t, & U = \displaystyle\int_{b}^{x+t} \frac{f}{2}\frac{dJ_0}{dt}\,dz + \frac{f(x+t)}{2}, \\ 5^\circ & b - t > x, & U = 0. \end{cases}$$

Nous avons ainsi la solution complète de deux cas particuliers, celui où f est nul et celui où f_1 est nul. Il est clair que l'on résoudrait le cas général en ajoutant ces deux solutions particulières.

Les résultats précédents peuvent donner lieu à diverses observations ; on voit d'abord que la *tête* de la perturbation se propage avec une certaine vitesse, de telle sorte que, en avant de cette tête, la perturbation est nulle, contrairement à ce qui se passe dans la théorie de la chaleur de Fourier et conformément aux lois de la propagation de la lumière ou du son par ondes planes, déduites de l'équation des cordes vibrantes. Mais il y a, avec ce dernier cas, une différence importante, car la perturbation en se propageant laisse derrière elle un résidu qui n'est pas nul ; car U ne s'annule pas pour $b + t > x > a - t$.

Si $a - b$ est très petit, c'est-à-dire si la perturbation est de très courte durée, les termes qui, dans les équations (4) et (5), sont exprimés par des intégrales sont très petits, tandis

que les termes débarrassés du signe $\int$ restent finis. On a donc sensiblement

$$U = \frac{1}{2} f(x - t) \text{ pour } a + t > x > b + t.$$

$$U = \frac{1}{2} f(x + t) \text{ pour } a - t > x > b - t,$$

$$U = 0 \text{ dans tous les autres cas.}$$

Le résidu est donc négligeable devant la perturbation principale ; mais il n'en est plus de même si la perturbation est de longue durée et si $a - b$ est fini. Le résidu peut alors troubler les observations.

De même, si la perturbation se compose d'une suite de courants alternatifs de très grande fréquence, les intégrales (dont les éléments seront alternativement positifs et négatifs et changeront de signe un très grand nombre de fois dans l'intervalle d'intégration) seront très petites pendant que les termes débarrassés du signe $\int$ resteront finis. Ici encore résidu sera négligeable devant la perturbation principale.

Mais, dans les expériences de M. Fizeau, les courants n'étaient pas alternatifs, mais intermittents ; de plus, la durée de chaque période était relativement longue, et enfin, l'intervalle de temps qui séparait deux émissions de courant consécutives n'était pas plus long que la durée de chacune de ces émissions. Dans ces conditions, l'influence du résidu devait être considérable, et c'est ce qui explique le phénomène de la diffusion observé par M. Fizeau.

87 *e*. Influence de la diffusion. — Je ne veux pas don-

ner ici une théorie complète du phénomène et je me contenterai d'un aperçu. Tout doit, en somme, se passer comme si une partie de l'électricité se mouvait avec la vitesse même de la lumière, pendant que le reste suivrait avec une vitesse moindre et d'ailleurs variable. Nous aurions alors une forte tête de colonne s'avançant avec une vitesse de 300 000 kilomètres, mais en laissant en arrière des traînards qui s'éparpilleraient sur la route.

La méthode de M. Fizeau mesure non pas la vitesse maximum, c'est-à-dire celle de la tête de colonne, mais la vitesse moyenne qui doit être notablement moindre. C'est ce qui explique pourquoi la vitesse observée est très inférieure à 300 000 kilomètres.

La vitesse moyenne dans le fer est moindre que dans le cuivre pour deux raisons : 1° parce que le fer est magnétique, ce qui augmente la self-induction à cause de l'aimantation transversale ; 2° parce que sa résistance spécifique est plus grande que celle du cuivre, ce qui augmente l'influence de la diffusion.

Les expériences de M. Fizeau ne sont donc pas en désaccord avec la théorie.

87 *f*. Expériences de Siemens. — Siemens a repris la question, en 1875, à l'aide d'un appareil qui se compose essentiellement d'un cylindre d'acier tournant rapidement et dont la surface est enduite de noir de fumée. Près de cette surface sont placées deux pointes métalliques P et P′ ; deux perturbations électriques se produisant simultanément au même point, arrivent la première en P par un chemin très court, la seconde en P′ après avoir parcouru une longue ligne.

Deux étincelles éclatent, la première entre la pointe P et le cylindre tournant, la seconde entre la pointe P′ et ce même cylindre; chacune d'elles laissent sur la surface du cylindre une trace facilement perceptible.

La distance de ces deux traces permet d'apprécier le temps qui s'est écoulé entre les deux étincelles, c'est-à-dire le temps que la seconde perturbation a mis à parcourir la longue ligne.

Voici comment on obtenait la simultanéité des deux perturbations. On se servait de deux bouteilles de Leyde, dont les armatures extérieures étaient réunies par un fil métallique; l'armature intérieure de la première bouteille était en communication avec la pointe P, celle de la seconde avec la longue ligne et la pointe P′. Quant au cylindre tournant, il était en communication avec le sol.

Les bouteilles étant chargées, on les déchargeait en touchant le fil qui joint les armatures extérieures. Les électricités des deux armatures intérieures devenaient ainsi libres *en même temps* et s'écoulaient dans le sol, la première par la pointe P et le cylindre, la seconde par la longue ligne, la pointe P′ et le cylindre.

La pointe P donne une trace unique; la pointe P′ donne une série de traces se succédant à intervalles plus ou moins réguliers sur une même ligne; il se produit donc en P′ non pas une seule étincelle, mais une série d'étincelles. C'est là l'effet de la diffusion. Il ne faudrait pas croire que cette série d'étincelles est la preuve de l'existence d'un phénomène oscillatoire et l'explication donnée par Siemens paraît préférable.

La première étincelle en échauffant l'air, fraye un chemin

par où l'électricité s'écoule. Mais, par suite de la rotation du cylindre, ce chemin s'incurve et s'allonge de plus en plus ; sa résistance croît et finit par devenir assez grande pour que l'électricité préfère se frayer un chemin nouveau par une seconde décharge disruptive, et ainsi de suite. C'est ainsi qu'un courant continu peut produire une série discontinue d'étincelles.

Voici les résultats obtenus :

Ligne	Longueur en kilomètres	Vitesse en kilomètres
1	25,36	202.600
2	23,32	230.500
3	7,2	241.800
4	23,32	256.600

Ces résultats ne sont pas absolument concordants ; mais tous donnent une vitesse au moins double de celle qu'avait observée M. Fizeau (100 000 kilomètres dans le fer), mais inférieure à celle de la lumière.

En observant le moment où éclate la *première* étincelle, Siemens n'observe pas, comme M. Fizeau, une sorte de vitesse moyenne, mais une vitesse voisine de celle du front de l'onde. Mais ce n'est pas pourtant celle du front de l'onde elle-même. La première étincelle éclate au moment où le potentiel de P′ atteint une certaine valeur qui dépend de la distance de cette pointe au cylindre. Soit V_0 cette valeur. La distance du front de l'onde au point P_0 où le potentiel est égal à V_0 va en augmentant par suite de la diffusion à mesure que la perturbation se propage, de sorte que la vitesse mesurée, qui est celle du point P_0, peut être inférieure à celle du front de l'onde (et cela d'autant plus que V_0 sera plus grand).

Ces considérations expliquent pourquoi la vitesse mesurée par Siemens est très supérieure à celle de M. Fizeau et plus petite que celle de la lumière. D'ailleurs, la vitesse observée, qui est celle de P_0, doit être plus petite que celle du front de l'onde, et celle-ci à son tour doit être plus petite que 300 000 kilomètres, car le magnétisme du fer a, comme je l'ai dit plus haut, pour effet d'augmenter la self-induction.

Quant aux divergences des différents résultats, elles peuvent s'expliquer de bien des manières; on peut les attribuer à des différences dans la susceptibilité magnétique du fer, ou bien supposer que la valeur de V_0 n'était pas la même dans les différentes expériences. On pourrait d'ailleurs imaginer beaucoup d'autres explications.

87 *g*. Expériences de M. Blondlot. — La discussion qui précède montre suffisamment combien la propagation d'un courant continu, ou bien intermittent ou alternatif de basse fréquence, diffère de la propagation des perturbations hertziennes.

Ces dernières, en effet, sont de très courte durée et formées d'oscillations dont la période est excessivement courte.

On a donc lieu de penser que l'influence de la diffusion sera négligeable, le résidu laissé en arrière très faible, et la vitesse moyenne extrêmement voisine de la vitesse du front de l'onde, c'est-à-dire de 300 000 kilomètres.

On ne pouvait donc rien conclure, en ce qui concerne ces perturbations, des expériences que nous venons de relater, et de nouvelles études étaient nécessaires : c'est ce qui a

décidé M. Blondlot à entreprendre les expériences suivantes :

Son appareil se compose de deux bouteilles de Leyde symétriques F et F′ de petite capacité. Les armatures intérieures A et A′ sont mises en communication par un fil interrompu en son milieu par un micromètre à étincelles. Les deux bornes de ce micromètre sont reliées à une bobine de Ruhmkorf. L'ensemble de ces armatures A et A′, du fil qui les joint et du micromètre constitue un véritable excitateur que j'appellerai E.

L'armature extérieure de chacune des deux bouteilles F et F′ est divisée en deux parties isolées. J'appellerai B et C les deux parties de l'armature extérieure de F, B′ et C′ celles de l'armature extérieure de F′.

B et B′ sont mises en communication de deux manières :

1° Par une corde mouillée ;

2° Par un fil métallique court, interrompu en son milieu par un micromètre à étincelles dont les bornes sont formées par deux pointes métalliques P et P′.

De même C et C′ sont mises en communication de deux manières :

1° Par une corde mouillée ;

2° Par un fil de ligne. Ce fil va d'abord de l'armature C au point D, à l'extrémité de la ligne, puis revient de D à la pointe P dont j'ai parlé plus haut ; après avoir traversé le micromètre, l'électricité doit aller de la pointe P′ au point D′ à l'extrémité de la ligne, puis revenir du point D′ à l'armature C′. Les poteaux télégraphiques portent ainsi quatre fils, CD, DP, P′D′, D′C′ et l'électricité pour aller de C en C′ par ce chemin, en traversant le micromètre, doit parcourir

quatre fois toute la longueur de la ligne, deux fois à l'aller et deux fois au retour.

On peut donc aller de B en B′ ou de C en C′ par deux chemins, par une corde mouillée de grande résistance, ou par un chemin métallique, mais interrompu par un micromètre.

Si les variations de potentiel sont lentes, l'électricité passera tout entière par la corde mouillée, car la différence de potentiel entre les deux pointes P et P′ ne deviendra jamais assez grande pour que l'étincelle éclate et le micromètre restera isolant.

Si, au contraire, ces variations sont rapides, l'étincelle éclatera, frayera un chemin à l'électricité, à travers le micromètre PP′; la quasi-totalité de l'électricité passera par le chemin métallique, et il ne passera par la corde mouillée qu'une quantité négligeable à cause de la grande résistance de cette corde.

Voici comment fonctionnera l'appareil. La bobine de Ruhmkorf chargera les armatures intérieures A et A′, par exemple A positivement et A′ négativement. Les armatures B et C se chargeront négativement par influence; les armatures B′ et C′ se chargeront positivement. Il faut donc qu'une certaine quantité d'électricité aille de B en B′ et de C en C′; mais, comme les variations sont relativement lentes, cette électricité passera par les cordes mouillées.

A un certain moment, l'étincelle de l'excitateur E éclatera. Cette étincelle sera oscillante, comme son aspect le montre suffisamment. Les armatures A et A′ vont se décharger brusquement, de sorte que les électricités accumulées sur les armatures B, C, B′ et C′ vont devenir libres brusquement

et simultanément. L'électricité va donc repasser de B′ en B et de C′ en C ; mais cette fois en suivant le chemin métallique, car les variations sont brusques.

Deux étincelles éclateront dans le micromètre PP′, qui est la partie commune aux deux chemins métalliques BB′ et CC′. La première étincelle éclatera au moment où la perturbation partie de B arrivera en P, la seconde au moment où la perturbation partie de C arrivera en P. Comme le chemin BP est très court, l'intervalle de temps qui s'écoulera entre les deux étincelles sera égal au temps que la perturbation mettra à parcourir le chemin CDP. C'est cette longueur CDP que j'appellerai la *longueur de la ligne* ; elle est le double du fil d'aller CD qui va à l'extrémité de la ligne et la moitié du chemin total CDPP′D′C′.

L'intervalle de temps entre les deux étincelles était apprécié à l'aide d'un miroir tournant qui renvoyait la lumière des étincelles sur une plaque sensible ; on n'avait plus qu'à mesurer la distance des deux images obtenues sur cette plaque.

Les premières expériences où la longueur de la ligne était d'un peu plus de 1 kilomètre ont donné en moyenne une vitesse de 293 000 kilomètres ; avec une longueur de ligne de 1 800 mètres, on a obtenu ensuite en moyenne une vitesse de 298 000 kilomètres.

Les lignes étaient en cuivre ; observons d'autre part que, même avec une ligne en fer, on aurait pu s'attendre à obtenir une vitesse peu différente. Les expériences de Hertz ont montré, en effet, que la longueur d'onde est la même dans le fer que dans le cuivre, comme si l'aimantation transversale, ne pénétrant qu'à une profondeur excessivement faible, n'avait pas d'influence sur la vitesse de propagation.

87 *h*. Les expériences de M. Blondlot ont mis en évidence un autre fait important. Avant de les avoir réalisées, M. Blondlot craignait que la seconde étincelle ne soit pas visible à cause de l'affaiblissement dont j'ai parlé plus haut (nº 67).

Cet effet ne s'est pas produit ; il y a bien une différence d'intensité entre les images des deux étincelles, ce qui d'ailleurs aide à les distinguer ; mais M. Blondlot ne croit pas que cette différence soit due à cette cause, parce que quand on supprime la communication BPP′B′, la seule étincelle qui subsiste prend un éclat plus fort que celui que présentait la première étincelle avant la suppression de la communication. On pourrait expliquer la différence d'intensité entre les deux images de la façon suivante. La première étincelle échauffe l'air entre les deux pointes ; quand la seconde étincelle éclate, elle rencontre moins de résistance et c'est pour cette raison qu'elle est moins brillante.

CHAPITRE V

PROPAGATION DES OSCILLATIONS DANS L'AIR

88. Nous allons trouver ici un criterium qui nous permettra de décider entre les anciennes théories et celle de Maxwell : d'après les anciennes théories, les phénomènes d'induction se manifestent instantanément dans un circuit secondaire, quelque éloigné qu'il soit du primaire ; d'après la théorie de Maxwell au contraire, l'induction se propage avec une vitesse égale à celle de la lumière.

Or on a établi expérimentalement, avec une exactitude suffisante, que cette propagation n'est pas instantanée et se fait avec une vitesse égale à celle de la lumière : ce résultat justifie donc la théorie de Maxwell et est en désaccord avec les anciennes théories.

Nous allons exposer les expériences qui ont permis d'arriver à ce résultat.

89. Expériences de Hertz à Carlsruhe. — Nous avons vu comment Hertz, après avoir trouvé $2^{m},80$ pour la demi-

longueur d'onde dans un fil conducteur, en avait conclu, à cause d'une erreur commise dans le calcul de la période, que la vitesse de propagation était de 200 000 kilomètres.

Il a ensuite cherché à mesurer la longueur d'onde dans l'air, et à en déduire la vitesse de propagation.

Pour cela il employait l'appareil figuré (*fig.* 35).

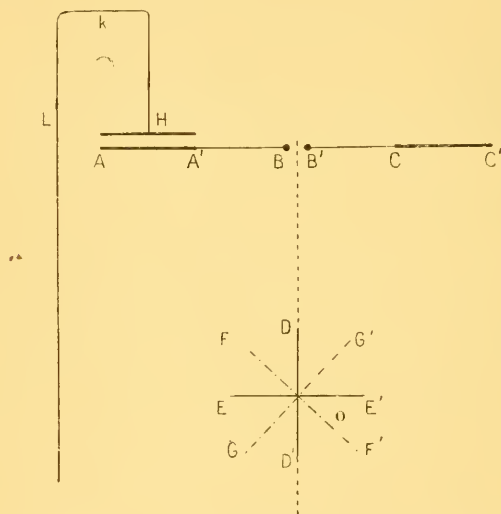


Fig. 35.

Deux plaques carrées AA' et CC' sont réunies aux deux extrémités du micromètre à étincelles BB'. En face de la plaque AA' est une autre plaque à laquelle est fixée un fil HKL de longueur assez considérable pour qu'on puisse négliger l'onde de retour après réflexion à l'extrémité du fil.

Hertz appelle droite principale la droite fictive perpendiculaire au milieu de l'interrupteur BB'. Le centre *o* du résonateur est placé sur la droite principale et son plan est vertical.

Le résonateur pouvait tourner autour d'un axe vertical passant par le point O; sur la figure, on l'a représenté en DD, dans le plan vertical passant par la droite principale; on a figuré également plusieurs autres positions.

Quand le résonateur est placé en DD′, l'action directe de l'excitateur propagée par l'air est nulle: en effet, le plan vertical dans lequel se trouve le résonateur est un plan de symétrie pour l'excitateur et est, par suite, perpendiculaire aux lignes de force électrique, d'où l'absence de courants dans le résonateur dus à la propagation par l'air. Il ne reste que le courant dû à la perturbation qui se propage par le fil : on le vérifie en supprimant le fil ; les étincelles alors disparaissent.

Inversement, lorsque le résonateur est dans la position EE′, c'est la propagation par l'air qui influe seule ; on s'en assure en éloignant de plus en plus le résonateur du micromètre BB′: les étincelles diminuent d'intensité et tendent à disparaître.

Faisons maintenant tourner le résonateur autour de l'axe vertical o ; les deux perturbations dues à celles qui se propagent par l'air et par le fil changent de signe, l'une quand le résonateur passe par DD′ et l'autre quand il passe par EE′.

Pour une certaine différence de phase entre la perturbation propagée par l'air et celle propagée par le fil, les deux effets s'ajouteront en FF′, où l'étincelle sera plus forte, et se retrancheront en GG′, où elle sera plus faible.

Si la différence de phase augmente d'une demi-période, les deux effets se retranchent au contraire en FF′ et s'ajoutent en GG′.

Hertz faisait varier la longueur HKL ou la distance OB. Il comparait l'étincelle obtenue dans la position FF′ à celle qui se produisait dans la position GG′ : il notait les valeurs de HKL ou de OB pour lesquelles la première était plus grande que la seconde et la position des *zéros* pour lesquels les deux étincelles étaient égales, et observait ainsi les distances des nœuds, correspondant au déplacement de l'étincelle maximum F en G et de G en F.

Soient :

λ la longueur d'onde dans le fil.
λ' . . . . dans l'air.
V la vitesse de propagation dans le fil.
V′. . . . . dans l'air.
T la période.

Calculons la différence de phase des perturbations transmises l'une par le fil et l'autre par l'air ; soient :

$$h = \mathrm{HKL}$$
$$d = \mathrm{OB}.$$

La différence de phase est :

$$\tau = \frac{d+h}{V} - \frac{d}{V'}. \qquad (1)$$



Fig. 36.

Les résultats de l'observation sont représentés par la figure 36, le signe + correspondant à une étincelle maxima en G, le signe — à une étincelle maxima en E, *o* correspondant à une égale valeur de ces étincelles.

Soient alors α, β, γ trois *zéros* consécutifs. Je désignerai

par λ'' l'intervalle $\alpha\gamma$ qui correspond à une période complète et j'aurai :

$$\tau + T = \frac{d + h + \lambda''}{V} - \frac{d + \lambda''}{V'}. \qquad (2)$$

En retranchant membre à membre les équations (2) et (1), on trouve :

$$T = \lambda''\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V'}\right)$$

ou, comme :

$$\lambda = VT \qquad \lambda' = V'T,$$

$$\frac{1}{\lambda''} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}.$$

λ, longueur d'onde dans le fil a été trouvée égale à $2 \times 280 = 560$ centimètres. D'ailleurs, l'expérience que nous venons de décrire donnait $\lambda = 1\,500$ centimètres.

En portant ces valeurs dans la relation précédente, on obtient à peu près :

$$\lambda' = 900 \text{ centimètres.}$$

Remarquons que, si l'on a $V = V'$, on devrait trouver pour λ'' une valeur infinie.

D'ailleurs, si l'on admet, d'après les anciennes théories, que V' est infini, on devrait avoir :

$$\lambda'' = \lambda.$$

Ne trouvant aucun de ces deux résultats, Hertz pensa que la vitesse de propagation est finie, mais différente de la vitesse de propagation dans un fil.

Il faut d'ailleurs bien remarquer que ces expériences don-

nent prise à la critique : c'est ainsi qu'on n'avait même pas assez d'espace pour mesurer une période complète.

De plus, Hertz n'avait pas tenu compte des réflexions sur les murs de la salle où il faisait les expériences. Les expériences ultérieures de Hertz lui ayant montré l'importance de ces réflexions, ce savant a renoncé à sa première interprétation. Je n'ai donc rappelé cette première série d'expériences que pour mémoire.

90. Hertz a ensuite opéré avec des excitateurs donnant des ondes beaucoup plus courtes et a trouvé cette fois que la vitesse dans l'air est égale à la vitesse dans le fil. Il admettait alors implicitement que la propagation dans le fil dépendait de la longueur d'onde. Ces dernières expériences n'ont d'ailleurs pas été publiées.

91. Expériences du miroir. — Ondes stationnaires. — Hertz entreprit aussi des expériences en supprimant le fil, et en faisant réfléchir sur une plaque métallique les perturbations émanées de l'excitateur et en déplaçant un résonateur circulaire entre le miroir et l'excitateur.

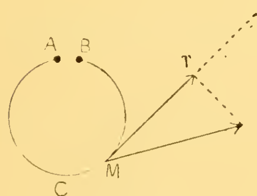


Fig. 37.

Pour nous rendre compte de ce qui se passe il nous faudrait faire une théorie complète du résonateur. Contentons-nous ici d'un raisonnement sommaire dû à Hertz.

Supposons appliquée en un point M du fil du résonateur (*fig.* 37) une certaine force électrique; nous aurons la composante utile en la projetant sur la tangente, elle tendra à produire un courant dans le sens indiqué par la flèche.

Déplaçons le point d'application de la composante MT, en conservant à celle-ci une valeur constante. L'action qu'elle produira ne sera pas la même en tous les points du résonateur.

Hertz fait le raisonnement suivant : en A et B le courant a une valeur très faible, ces deux points étant des nœuds. On peut donc assimiler le résonateur à une corde fixée à ses deux extrémités, c'est-à-dire que l'action de MT sera nulle quand cette composante sera appliquée en A ou en B, maxima au point C et intermédiaire aux autres points.

La salle dans laquelle Hertz fit ses expériences avait 15 mètres de longueur, 14 de largeur et 6 de hauteur ; mais elle était partagée en trois nefs par deux rangées de colonnes de fonte ; Hertz opérait dans la nef centrale, dont la largeur était de $8^{m},50$, et admettait que chaque rangée de colonnes agissait comme un mur ; peut-être cependant ces colonnes exerçaient-elles une action perturbatrice.

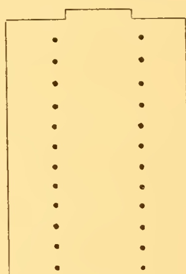


Fig. 38.

Dans le fond de la salle était une sorte de niche, de 1 mètre de profondeur, au fond de laquelle se trouvait placé le miroir métallique, large de 2 mètres et haut de 4 ; de cette disposition du miroir pouvaient encore résulter des perturbations.

L'excitateur était placé verticalement, c'est-à-dire que le fil conducteur portant le micromètre à étincelles était vertical. Ceci a une assez grande importance, car la vibration électrique se trouvait être verticale, c'est-à-dire parallèle à la grande dimension du miroir. C'était surtout dans le sens

horizontal qu'on pouvait craindre des effets de diffraction dus à l'exiguïté du miroir.

Le micromètre à étincelles se trouvait situé en face du centre du miroir métallique, à 13 mètres environ de ce miroir.

Mode de fonctionnement du résonateur. — Le résonateur était disposé tantôt dans le plan de vibration, c'est-à-dire dans un plan vertical passant par l'excitateur et la droite principale, tantôt dans le plan de l'onde, c'est-à-dire dans un plan parallèle au miroir.

Supposons-le d'abord placé dans le plan de vibration, à 80 centimètres du miroir, le micromètre à étincelles étant placé du côté du miroir (*fig.* 39). Les étincelles qu'on obtient dans cette position sont assez fortes; faisons tourner le résonateur de 180° dans son plan, sans déplacer son centre. Dans cette nouvelle position on obtient des étincelles plus faibles que les précédentes. Interprétons ces faits : en C s'exerce une force électrique CD ; en E, une force EF; dans les deux positions les forces sont les mêmes, mais le micromètre est en E dans le premier cas et en C dans le second.

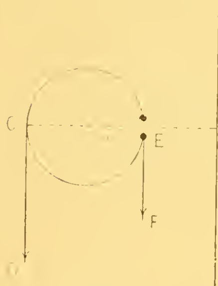


Fig. 39.

Si nous acceptons les idées de Hertz que nous avons exposées plus haut, nous devons considérer la force CD comme la force la plus active dans le premier cas, EF étant alors inactive, tandis que dans le second cas les rôles sont renversés. Comme les premières étincelles sont plus fortes

que les secondes, on en conclut que la force CD est plus grande que la force EF.

Les faits que nous venons de décrire ont lieu quand le résonateur est placé à une petite distance du miroir, 80 centimètres par exemple.

Déplaçons maintenant le résonateur à partir du miroir, en répétant pour chaque position la série d'expériences que nous venons de décrire. Près du miroir, les étincelles qui jaillissent quand le micromètre est tourné vers lui sont plus fortes que celles qui jaillissent quand il est du côté opposé. A mesure qu'on s'éloigne du miroir, cette différence diminue, s'annule, change de signe et on observe ainsi des effets alternés se succédant périodiquement.

Supposons-nous en un point où les étincelles ont la même force, que le micromètre soit en C ou en E. Les deux forces CD et EF sont alors égales en valeur absolue (*fig.* 40); cherchons si elles sont ou non de même signe.

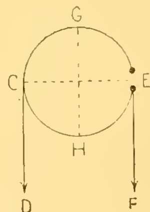


FIG. 40.

Supposons-les d'abord de même sens et amenons le micromètre au point G. Les deux forces auront sur le résonateur la même action en valeur absolue, mais ces deux actions tendent à produire des courants de sens contraires et se compensent, c'est-à-dire qu'on ne doit pas observer d'étincelles en G.

Supposons, au contraire, les deux forces égales et de sens contraires ; les actions de ces deux forces, quand le micromètre est en G, s'ajoutent alors et donnent lieu à des étincelles.

Il est facile de se rendre compte que, dans le premier de

ces deux cas, la force est maxima ou minima au point O, qu'occupe le centre du résonateur, tandis que dans le second cas elle est nulle en ce point : dans le premier cas en effet, la courbe représentant la force électrique aura deux ordonnées symétriques, ce qui indique au milieu un maximum ou un minimum ; autrement dit, ce point est un ventre pour la force électrique. Dans le second cas, les ordonnées sont bien égales de part et d'autre, mais de signes contraires ; en O la force est donc nulle et ce point est un nœud pour la force électrique.

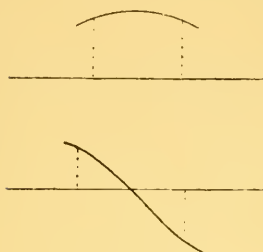


Fig. 41.

Pour la force magnétique, la disposition des nœuds et des ventres est inverse de la précédente. Considérons le premier cas : quand on place le micromètre en G, on n'obtient pas d'étincelles ; mais l'étincelle peut être produite par deux actions, les actions électrostatique et d'induction. Comme GOH est un axe de symétrie parallèle au champ électrique, l'action électrostatique est nulle.

Il reste l'induction électromagnétique, proportionnelle au flux de force qui traverse le cercle du résonateur, c'est-à-dire à peu près proportionnelle à la valeur de la force magnétique au centre O. Comme il ne se produit pas d'étincelles, c'est que la force magnétique est nulle en O : ce point, qui correspond à un ventre pour la force électrique, correspond donc à un nœud pour la force magnétique.

Voici les distances des ventres et des nœuds observés, pour la force électrique :

1er ventre :	1m,72 du miroir.
1er nœud :	4m,12.
2e ventre :	6m, à 6m,50. Peu net.
2e nœud :	Très peu net.

Hertz a pris pour longueur d'onde le quadruple de la distance du premier ventre au premier nœud, c'est-à-dire $2^m,40 \times 4 = 9^m,60$.

D'après cette valeur de la longueur d'onde, le nœud précédant le premier se trouverait non pas sur le miroir même, mais à 70 centimètres environ de l'autre côté. Ce résultat est dû évidemment aux causes perturbatrices que nous avons signalées.

La valeur trouvée ainsi pour la longueur d'onde tendait à montrer que la vitesse de propagation dans l'air est plus grande que la vitesse de propagation dans les fils.

Hertz a fait également des expériences en plaçant le résonateur dans le plan de l'onde ; les résultats sont moins nets, mais leur interprétation est simple : comme le résonateur est alors parallèle au miroir, en observant les maxima et les minima de l'étincelle, on observe aussi les maxima et les minima de la force électrique.

Les résultats ont été à peu près les mêmes que ceux des expériences précédentes.

92. Expériences de Hertz à Bonn. — Hertz a répété à Bonn les expériences qu'il avait faites à Carlsruhe, dans un amphithéâtre qui malheureusement était garni de bancs, ce qui était une cause de perturbation. Aussi les maxima et minima de l'étincelle étaient-ils peu marqués.

Nous voyons, en somme, que les expériences de Hertz n'ont

pas donné de résultat décisif au point de vue de la comparaison des vitesses de propagation dans les fils et dans l'air.

93. Premières expériences de MM. Sarasin et de la Rive (1). — Entre les expériences que Hertz exécuta à Carlsruhe et celles qu'il fit à Bonn se placent les premières expériences de MM. Sarasin et de la Rive. Ces expérimentateurs se servirent de résonateurs de dimensions différentes, de sorte que la résonance n'était pas toujours parfaite, l'accord n'existant pas entre les périodes de l'excitateur et du résonateur.

Ils ont trouvé que la longueur d'onde dans l'air dépendait des dimensions du résonateur et pas de celles de l'excitateur. La longueur d'onde mesurée dans l'air était sensiblement égale à la longueur d'onde dans le fil, et cette valeur commune était environ huit fois le diamètre du résonateur.

De plus, en opérant avec un appareil de même dimension que celui de Hertz, ils ont trouvé, au lieu de 900 centimètres, nombre de Hertz, le nombre 600 centimètres, qui est conforme à la théorie.

La seule cause possible de ces divergences est l'influence des dimensions de la salle et du miroir. Les dimensions du miroir sont ici du même ordre que la longueur d'onde et les phénomènes de diffraction acquièrent une grande importance.

Le miroir dont se servaient MM. Sarasin et de la Rive avait $2^{m},80$ de hauteur et 3 mètres de largeur. Ils ont fait varier la distance de l'excitateur au miroir depuis 4 mètres jusqu'à 10 mètres.

(1) Sarasin et de la Rive, *C. R.*, t. CX, p. 72.

Voici les résultats trouvés dans ces expériences :

Diamètre du résonateur en mètres		1	0,75	0,35	0,25	0,10
(Distance au miroir)	1er ventre	2,11	1,60	0,76	0,54	0,21
	1er nœud	4,14	3,01	1,49	0,94	0,41
	2e ventre	»	»	2,30	1,63	0,59
	2e nœud	»	»	3,04	2,15	0,79
	3e ventre	»	»	»	2,71	0,96

Pour les petites longueurs d'onde, on voit qu'on peut observer un plus grand nombre de maxima et de minima que pour les grandes longueurs d'onde, ce qui rend bien manifeste la périodicité du phénomène.

Afin de diminuer les causes d'erreur dues aux phénomènes de diffraction, les deux expérimentateurs ont employé dans une autre série d'expériences un miroir de plus grandes dimensions : les résultats ont été plus nets, surtout avec les plus petits résonateurs.

M. Joubert a répété les expériences de MM. Sarasin et de la Rive, mais sans faire de mesures précises ; il semble cependant que ses résultats soient plus voisins de ceux de MM. Sarasin et de la Rive que de ceux de Hertz.

Toutes les expériences que nous venons de passer en revue n'avaient donc pas démontré nettement l'égalité des vitesses de propagation dans l'air et dans les fils. De nouvelles expériences sont venues établir plus nettement ce point.

94. Nouvelles expériences de MM. Sarasin et de

la Rive [1]. — Dans ces derniers temps, MM. Sarasin et de la Rive ont pu répéter leurs expériences avec un miroir métallique plus grand, dans une grande salle, en un mot dans des conditions assez favorables pour qu'ils aient pu observer plusieurs nœuds d'une façon suffisamment nette. Ils ont bien trouvé 600 centimètres avec un appareil identique à celui de Hertz, ce qui établit l'égalité des vitesses de propagation dans l'air et dans les fils conducteurs plongés dans l'air.

Pour pouvoir augmenter l'intensité de l'étincelle, MM. Sarasin et de la Rive la font jaillir non pas dans l'air, mais dans un diélectrique liquide. En effet, plus on écarte les deux boules du micromètre à étincelles BB′, plus la différence de potentiel centrale et, par suite, l'amplitude des oscillations est considérable ; mais, en écartant trop les bornes dans l'air, on empêche, à partir d'une certaine limite, les étincelles d'être oscillantes, la force contre-électromotrice ne disparaissant pas dans un temps négligeable vis-à-vis de celui de la période.

C'est pourquoi MM. Sarasin et de la Rive font jaillir l'étincelle dans un diélectrique liquide, ce qui permet d'écarter les boules sans empêcher l'étincelle d'être oscillante et, par suite, d'augmenter l'amplitude des oscillations.

Le miroir dont ils se servaient avait alors 8 mètres de hauteur et 16 mètres de largeur, et la salle où étaient disposées les expériences était de très grandes dimensions.

Les résultats ont été très bons avec les résonateurs de 50 centimètres et de 75 centimètres, et moins nets avec le

(1) Sarasin et de la Rive, *C. R.*, t. CXII, p. 688.

résonateur de 1 mètre. Mais il est évident que, quelles que soient les dimensions du miroir et de la salle, on pourrait toujours construire un résonateur assez grand pour que les causes d'erreur reprennent toute leur importance, et les résultats obtenus par MM. Sarasin et de la Rive doivent être considérés comme très satisfaisants.

Les voici :

Diamètre du résonateur	$0^m,50$	$0^m,75$
1er ventre	1	1,50
1er nœud	2	3 »
2e ventre	3	4,50
2e nœud	4	6 »
3e ventre	5	7,50
3e nœud	6	»

Ainsi le nœud précédant le premier ventre se trouve bien sur le miroir lui-même ; l'égalité des vitesses de propagation dans les fils et dans l'air se trouve établie par ces nouvelles expériences.

Remarque. — Hertz n'a jamais douté de l'exactitude des résultats obtenus par MM. Sarasin et de la Rive ; aussi a-t-il cherché les raisons qui ont pu lui faire trouver un résultat si différent. En particulier, il remarque qu'une réflexion se produit non seulement sur la paroi de la salle où est situé le miroir, mais encore sur la paroi opposée ; des nœuds doivent exister sur ces deux parois ; la longueur de la salle doit donc être un multiple de l'internœud, c'est-à-dire de $\frac{\lambda}{2}$.

Si $\frac{\lambda}{2}$ n'est pas un sous-multiple exact de la longueur de la salle, ce qu'on observera, ce sera le sous-multiple de cette longueur le plus voisin de $\frac{\lambda}{2}$. L'erreur se trouvera d'autant plus petite que la salle sera plus grande.

Mais ce qui précède ne suffit pas pour expliquer l'erreur considérable commise par Hertz ; il y aurait un grand intérêt à en connaître la véritable explication ; mais il est à craindre que la question ne reste longtemps obscure.

95. Objections de MM. Hagenbach et Zehnder. — MM. Hagenbach et Zehnder ont formulé quelques objections sur la façon d'envisager les phénomènes telle que nous l'avons exposée jusqu'ici.

Ils ont même mis en doute le caractère périodique du phénomène qui se produit dans l'excitateur.

Nous allons examiner ces objections et voir comment on peut leur répondre.

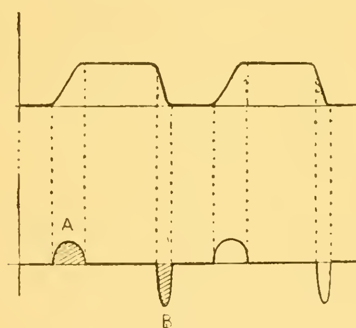


Fig. 42.

Rappelons comment se comporte une bobine de Ruhmkorff ; le courant inducteur part de o, croît, garde un certain temps une valeur constante, puis décroît en variant plus rapidement que pendant la période de fermeture. Sa variation est représentée par une courbe telle que celle de la figure 42.

La force d'induction est proportionnelle à $\frac{di}{dt}$; il sera donc

facile de déduire la courbe qui la représente de la courbe précédente ; la dérivée est positive au moment de la fermeture du courant inducteur et négative au moment de la rupture ; elle est nulle pendant que ce courant reste constant.

Remarquons que l'aire ombrée est nulle algébriquement, parce que, l'intensité i du courant variant périodiquement, il en est de même de $\frac{di}{dt}$, et par suite l'intégrale

$$\int \frac{dt}{di}\,dt$$

étendue à une période est nulle. Mais, comme l'intensité du courant varie plus rapidement pendant l'ouverture que pendant la fermeture du courant, l'ordonnée maximum est plus petite dans la première courbe que dans la seconde. La distance explosive, étant assez petite pour que l'ordonnée B donne lieu à des étincelles, se trouvera trop grande pour que l'ordonnée A puisse produire le même effet ; dans ce cas, le courant de fermeture ne donne donc pas d'étincelles, tandis que le courant de rupture en donne.

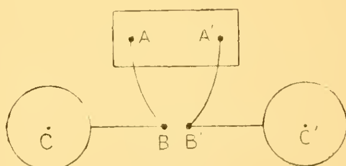


Fig. 43.

Ainsi, d'après MM. Hagenbach et Zehnder, les choses se passent de la façon suivante : au moment où le courant de rupture se produit dans la bobine, les capacités sphériques placées aux extrémités de l'excitateur (*fig.* 43) commencent à se charger, l'une positivement, l'autre négativement; quand la différence de potentiel entre les deux boules du

micromètre est suffisante, l'étincelle éclate et les charges s'annulent, puis les deux capacités se rechargent, d'où une nouvelle étincelle de même sens que la première.

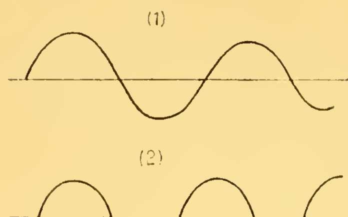


Fig. 44.

En somme, d'après les idées ordinaires, le courant qui circule dans l'excitateur peut être représenté par la première courbe de la figure 44, tandis que, d'après MM. Hagenbach et Zehnder, il doit être représenté par une courbe analogue à la deuxième.

96. Mais MM. Hagenbach et Zehnder ne tiennent pas compte de la self-induction dans leur raisonnement; d'ailleurs, ce n'est pas à la légère qu'on a adopté la première forme de courbe : d'abord, les théories anciennes, aussi bien que la théorie de Maxwell, conduisent à ce résultat, qu'il doit y avoir des oscillations; de plus, la vérification expérimentale a été faite par Feddersen et par M. Mouton. Il est vrai que Feddersen a indiqué la possibilité d'un courant analogue à celui représenté par la deuxième courbe, lorsque la résistance du circuit est très considérable; mais on se trouve là dans des circonstances tout à fait particulières.

97. Voyons comment MM. Hagenbach et Zehnder se figurent le fonctionnement du résonateur. Supposons l'étincelle, dans l'excitateur, intermittente et toujours de même sens. La force d'induction qui s'exerce sur le résonateur est propor-

tionnelle à la dérivée $\frac{di}{dt}$, c'est-à-dire qu'elle varie, comme l'indique la figure 45, d'une manière périodique, la période se composant de deux demi-oscillations et d'un repos.

Ces idées paraissent confirmées par ce fait que les figures de Priestley, qui se forment sur les boules du micromètre de l'excitateur, ne sont pas les mêmes sur les deux boules, tandis qu'elles sont semblables sur les deux boules du micromètre du résonateur.

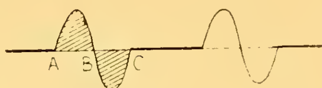


Fig. 45.

Les savants de Bâle en concluent que le courant est intermittent, mais toujours de même sens dans l'excitateur, alternatif dans le résonateur.

Voyons s'il y a là contradiction avec la théorie : soit i l'intensité du courant qui parcourt le circuit de la bobine, c'est-à-dire qui, dans la figure 43, parcourt ABB'A'; soit d'ailleurs i' l'intensité du courant qui circule dans les segments CB et B'C'. Dans l'intervalle BB', l'intensité du courant total sera :

$$i + i'.$$

i varie très lentement pendant la durée d'une oscillation hertzienne; c'est presque une constante pendant un certain nombre d'oscillations. i' au contraire, dans les idées de Hertz, est alternativement positif et négatif, mais n'atteint jamais la valeur de i, en sorte que, si i par exemple est positif, la somme $i + i'$ restera positive.

Ainsi, le fait que le courant entre B et B' est toujours de même signe ne préjuge rien sur les variations de i'.

D'autre part, les effets d'induction sont représentés par une expression de la forme :

$$A\frac{di}{dt} + B\frac{di'}{dt}.$$

Bien que i soit plus grand que i', comme i varie très lentement, la dérivée $\frac{di}{dt}$ a une valeur négligeable par rapport à $\frac{di'}{dt}$, de sorte que les effets d'induction observés sont les mêmes que si le courant dû à la bobine n'existait pas, tandis que le sens de la décharge est le même que si ce courant existait seul.

98. MM. Hagenbach et Zehnder ont fait une autre objection à l'idée que nous nous sommes faite des phénomènes.



Fig. 46.

Ils ont fait des expériences avec un résonateur ouvert, analogue à l'excitateur. Les deux parties du résonateur sont mises en communication avec les pôles d'un électromètre à quadrants, mais dans des conditions différentes de celles des expériences de M. Bjerknes.

M. Bjerknes n'avait conservé dans son électromètre que deux quadrants opposés ; l'aiguille restait isolée ; les deux extrémités du résonateur, dont les potentiels sont à un moment donné V_1 et V_2, étaient mises en communication respectivement avec l'un des quadrants, et l'effet produit à un moment était proportionnel à :

$$(V_1 - V_2)^2.$$

Le résonateur étant fermé, la différence $V_1 - V_2$ devenait nulle à la fin des oscillations, de sorte qu'on mesurait en somme :

$$\int (V_1 - V_2)^2 \, dt,$$

c'est-à-dire la déviation moyenne *pendant les oscillations.*

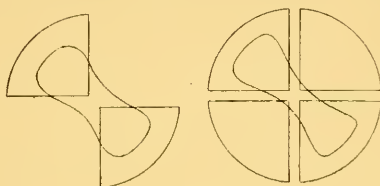


Fig. 47.

MM. Hagenbach et Zehnder emploient un électromètre ordinaire, à deux paires de quadrants, l'aiguille étant maintenue à un potentiel constant V. Dans ces conditions, si on désigne par V' et V'' les potentiels respectifs des deux paires de quadrants, la déviation de l'aiguille est proportionnelle à :

$$(V' - V'')\left(V - \frac{V' + V''}{2}\right).$$

On met en communication les deux paires de quadrants avec les extrémités du micromètre du résonateur, on a alors :

$$V' = V_1 \qquad V'' = V_2.$$

En donnant au potentiel V une valeur très considérable par rapport à V_1 et V_2, l'effet à un moment sera proportionnel à $V_1 - V_2$ et la déviation observée à :

$$\int (V_1 - V_2) . \, dt.$$

D'ailleurs, le résonateur étant ouvert, la différence $V_1 - V_2$

n'est pas nulle quand les oscillations sont terminées ; de plus, cette différence change de signe pendant les oscillations. En somme, ce qu'on mesure est la valeur moyenne de $V_1 - V_2$ pendant la période de repos qui suit les oscillations et dont la durée est très grande par rapport à celle de ces oscillations.

En définitive, on mesure la charge résiduelle, et le fait important mis en évidence par ces expériences est qu'il se maintient dans le résonateur quelque chose ayant le sens de la dernière décharge.

MM. Hagenbach et Zehnder expliquent ainsi ce fait : reportons-nous à la figure 45. Pendant la période AB de l'électricité se transporte dans le résonateur dans un certain sens, par exemple de gauche à droite ; pendant la période BC, il y a transport en sens inverse. Ces deux transports ne se compensent pas : le second l'emporte parce que la force électromotrice d'induction est aidée par la différence de potentiel qui, au bout de la période AB, existe dans le même sens entre les deux parties du résonateur.

Cette explication est intéressante, mais elle ne peut prévaloir sur les nombreuses expériences que nous avons rapportées et qui nous ont montré le caractère périodique du phénomène.

99. Cherchons une autre explication, en comparant le résonateur ouvert à un pendule ; la self-induction du résonateur correspondra à l'inertie du pendule ; la différence de potentiel existant entre les deux extrémités du résonateur, à la force qui sollicite le pendule, c'est-à-dire à la composante active de la pesanteur, qui est proportionnelle à l'écart quand l'écart est petit ; la résistance, à la résistance de l'air ; enfin la vitesse du pendule, à l'intensité du courant.

La force contre-électromotrice qui se produit dans le micro-

mètre à étincelles sera représentée par le frottement du couteau qui supporte le pendule (ou par celui d'un tourillon dans son coussinet).

D'ailleurs, la force électromotrice d'induction sera représentée par une force extérieure agissant sur le pendule.

Voyons maintenant ce qui se passe dans le mouvement du pendule : s'il n'y avait pas de frottement, l'équilibre ne pourrait être atteint que pour une valeur nulle de l'angle d'écart $\theta = 0$. Mais l'équilibre pourra être réalisé pour une valeur de θ différente de o, si dans la position qui correspond à cette valeur de θ les forces de frottement compensent exactement la pesanteur. Ainsi, le pendule mis en mouvement par un choc ou une série de chocs oscillera et s'arrêtera dans une position qu'on ne peut prévoir que si on connaît les lois du frottement.

Il se produit quelque chose d'analogue avec notre résonateur ouvert, mais la force contre-électromotrice qui correspond au frottement est mal connue : elle disparaît plus ou moins brusquement après l'étincelle. On ne peut donc prévoir dans quelles conditions les oscillations s'arrêteront, et les expériences de MM. Hagenbach et Zehnder pourraient probablement servir à étudier cette force contre-électromotrice, au lieu de constituer une objection.

En résumé, nous voyons que le travail de MM. Hagenbach et Zehnder ne peut nous conduire à changer les idées que nous avons précédemment exposées.

Nous allons maintenant faire, d'une façon plus complète, la théorie des résonateurs, et chercher si les résultats de cette théorie s'accordent avec ceux auxquels nous sommes parvenus.

CHAPITRE VI

APPLICATION DE LA THÉORIE

100. Théorie du résonateur. — Voici comment on peut poser dans toute sa généralité le problème : Un champ électromagnétique est produit par un excitateur ; on y introduit un conducteur métallique ; comment cela modifiera-t-il le champ et quels seront les courants qui naîtront dans le conducteur ?

Commençons par comparer ce problème à un problème d'électrostatique : Un conducteur C, au potentiel V_0, porte une charge électrique ; cette charge est disposée d'une certaine façon et produit un potentiel V qui est défini par $\Delta V = 0$ en dehors de la surface C, et par $V = V_0$ à la surface de ce conducteur.

Dans le champ ainsi constitué on introduit un deuxième conducteur C_1 ; il va se charger et, par suite de l'existence de cette charge, le champ sera modifié : la distribution électrique à la surface de C changera ; le potentiel, qui était V,

devient V' ; on a toujours :

$$\Delta V' = 0$$

en un point situé en dehors de la surface des conducteurs, et V' a une valeur constante à la surface de chacun d'eux.

Il peut arriver que le conducteur C_1 soit très petit ; alors on pourra négliger son influence sur C et poser le problème de la façon suivante : Soit V_1 le potentiel qui existait lorsque le conducteur C était seul, potentiel qui est supposé connu, et V la nouvelle valeur du potentiel.

Posons :

$$V = V_1 + V_2.$$

On aura :

$$\Delta V_2 = 0$$

puisque l'on a :

$$\Delta V = 0$$

et

$$\Delta V_1 = 0.$$

Le potentiel V_2 devient négligeable à une certaine distance de C_1 ; à la surface de C_1 on doit avoir :

$$V = C^{te},$$

c'est-à-dire :

$$V_2 = C^{te} - V_1.$$

Dans le problème que nous avons à traiter, nous allons rencontrer quelque chose d'analogue : l'excitateur correspond au conducteur C, le résonateur à C_1. Si le résonateur est assez petit, lorsqu'on l'introduira dans le champ, celui-ci ne sera modifié que dans la région avoisinante ; le résona-

teur n'influera pas sur l'excitateur ni sur le champ dans le voisinage de l'excitateur.

Nous appellerons X, Y, Z, L, M, N les composantes des forces électrique et magnétique après l'introduction du résonateur, $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$, étant les valeurs de ces composantes lorsque l'excitateur était seul. Nous poserons :

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 & L &= L_1 + L_2 \\ Y &= Y_1 + Y_2 & M &= M_1 + M_2 \\ Z &= Z_1 + Z_2 & N &= N_1 + N_2 \end{aligned}$$

Pour un point situé dans le diélectrique où sont supposés placés le résonateur et l'excitateur, on a les équations :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} A \frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \\ A \frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \end{aligned} \right.$$

et quatre autres qu'on déduirait facilement des précédentes par permutation.

Il faut de plus satisfaire à la condition que la force électrique soit normale à la surface de l'excitateur et du résonateur.

Les courants de conduction u, v, w n'existent que dans la couche superficielle de l'excitateur et du résonateur ; à l'intérieur de ces conducteurs il y a repos et les forces électrique et magnétique sont nulles.

D'ailleurs, lorsque l'excitateur est seul, on a de même :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} A \frac{dL_1}{dt} &= \frac{dZ_1}{dy} - \frac{dY_1}{dz} \\ A \frac{dX_1}{dt} &= \frac{dM_1}{dz} - \frac{dN_1}{dy} \end{aligned} \right.$$

dans tout le diélectrique ; la force électrique X_1, Y_1, Z_1 doit être normale à la surface de l'excitateur et nulle à l'intérieur, ainsi que la force magnétique L_1, M_1, N_1.

En retranchant membre à membre les équations (1) et (2), on obtient pour les quantités $X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2$ des équations analogues :

$$A \frac{dL_2}{dt} = \frac{dZ_2}{dy} - \frac{dY_2}{dz}$$
$$A \frac{dX_2}{dt} = \frac{dM_2}{dz} - \frac{dN_2}{dy}.$$

D'ailleurs, à l'intérieur du résonateur, les forces électrique et magnétique totales devant être nulles, on a :

$$X_2 = -X_1 \qquad L_2 = -L_1$$
$$Y_2 = -Y_1 \qquad M_2 = -M_1$$
$$Z_2 = -Z_1 \qquad N_2 = -N_1.$$

Désignons par u, v, w les composantes du courant de conduction et posons :

$$u = u_1 + u_2$$
$$v = v_1 + v_2$$
$$w = w_1 + w_2$$

les indices ayant la même signification que précédemment, et introduisons le potentiel vecteur de Maxwell F, G, H, qui est défini par les équations :

$$L = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$
$$M = \frac{dF}{dy} - \frac{dH}{dx}$$
$$N = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}$$
$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

Maxwell démontre que l'on a :

$$F = \text{pot}\left(Au + \frac{A}{4\pi}\frac{dX}{dt}\right)$$

$$G = \text{pot}\left(Av + \frac{A}{4\pi}\frac{dY}{dt}\right)$$

$$H = \text{pot}\left(Aw + \frac{A}{4\pi}\frac{dZ}{dt}\right)$$

c'est-à-dire que F, par exemple, est le potentiel dû à une matière attirante fictive dont la densité en un point est égale à la somme des composantes parallèles à ox du courant de conduction qui est Au avec les notions ét unités de Hertz, et du courant de déplacement $\frac{A}{4\pi}\frac{dX}{dt}$.

Nous poserons :

$$F_1 = \text{pot}\left(Au_1 + \frac{A}{4\pi}\frac{dX_1}{dt}\right)$$

et

$$F = F_1 + F_2,$$

ce qui donne :

$$F_2 = \text{pot.}\left(Au_2 + \frac{A}{4\pi}\frac{dX_2}{dt}\right),$$

de même pour G et H.

En appelant V le potentiel électrostatique dû à l'électricité libre qui existe à la surface de l'excitateur et du résonateur, on a :

$$X = A\frac{dF}{dt} + \frac{dV}{dx}.$$

On posera encore :

$$V = V_1 + V_2,$$

et l'on aura :

$$X_1 = A\frac{dF_1}{dt} + \frac{dV_1}{dx}$$

$$X_2 = A\frac{dF_2}{dt} + \frac{dV_2}{dx}.$$

101. Nous désignerons pour abréger, dans ce qui suivra, par E l'excitateur et par R le résonateur.

Nous avons supposé que la présence de R ne modifie pas le champ près de E, mais seulement près de R. Alors X_2, Y_2, Z_2 sont nulles à partir d'une certaine distance de R.

Comme l'introduction de R ne modifie pas les courants de conduction à la surface de E, u_1, v_1, w_1 représentent seules les composantes du courant de conduction à la surface de E ; u_2, v_2, w_2 représenteront les courants de conduction à la surface de R.

De même, la distribution de l'électricité à la surface de E n'étant pas modifiée par R, V_1 est le potentiel dû à l'électricité qui existe à la surface de E, et V_2 le potentiel dû à celle qui existe à la surface de R.

102. Énoncé du problème. — Il s'agit, étant données les valeurs de X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1, et la forme du résonateur, de calculer X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2.

On doit pour cela satisfaire aux équations :

$$A\frac{dL_2}{dt} = \frac{dZ_2}{dy} - \frac{dY_2}{dz}$$

$$A\frac{dX_2}{dt} = \frac{dM_2}{dz} - \frac{dN_2}{dy}.$$

Ces quantités doivent être nulles à partir d'une certaine distance du résonateur.

D'ailleurs, la force électrique totale doit être normale en tout point de la surface de E ou de R, ce qu'on exprimera en écrivant que la composante tangentielle est nulle. Comme on connaît en tous les points les valeurs de X_1, Y_1, Z_1, on voit que cette condition donne la valeur de la composante tangentielle de X_2, Y_2, Z_2, en tout point de l'une des deux surfaces.

On démontre que, dans ces conditions, et en supposant qu'on part du repos, le problème est complètement déterminé.

103. Établissement de l'équation qui exprime que la force électrique est nulle à l'intérieur du résonateur. — Nous ne traiterons le problème qu'en tenant compte de la forme particulière de R, que nous supposerons être constitué par un fil conducteur de petit diamètre; il aura d'ailleurs une forme quelconque, par exemple celle d'un cercle ou d'un rectangle.

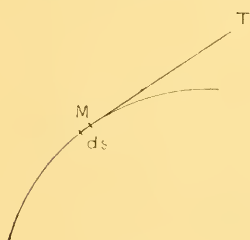


Fig. 48.

Soient l la longueur du fil et ρ_0 son rayon; nous supposerons ρ_0 assez petit pour qu'on puisse la négliger devant l'unité et négliger l'unité devant $\log \frac{l}{\rho_0}$.

Nous appellerons axe du fil le lieu des centres de ses sections droites.

Considérons un point M du fil et choisissons l'axe des x parallèle à la tangente au point M (*fig.* 48); M étant un point intérieur à R, la force électrique y est nulle, c'est-à-dire qu'on a :

$$X_1 + X_2 = 0$$

ou :

$$X_1 + A \frac{dF_2}{dt} + \frac{dV_2}{dx} = 0.$$

Posons :

$$F_2 = F'_2 + F''_2,$$

F'_2 étant le potentiel dû à la composante Au_2 du courant de conduction et F''_2 à la composante $\frac{A}{4\pi} \frac{dX_2}{dt}$ du courant de déplacement.

L'équation devient :

$$X_1 + A \frac{dF'_2}{dt} + A \frac{dF''_2}{dt} + \frac{dV_2}{dx} = 0. \qquad (3)$$

Nous allons calculer chacun des termes qui figurent dans cette équation, en tenant compte de la petitesse du rayon du fil ρ_0.

104. Calcul de $\frac{dV_2}{dx}$. — Nous allons calculer le potentiel V_2.

Soit s l'arc de l'axe du résonateur ; coupons le fil par deux plans normaux à l'axe, à une distance ds l'un de l'autre ; nous découpons ainsi un petit cylindre, à la surface duquel est une certaine quantité d'électricité que nous représenterons par :

$$e.ds.$$

Appelons i l'intensité du courant qui traverse une des bases du petit cylindre, et écrivons l'équation de continuité.

Il entre par une des bases une quantité d'électricité représentée par :

$$i.dt$$

et il sort par l'autre base une quantité :

$$\left(i + \frac{di}{ds} \cdot ds\right) dt.$$

La quantité d'électricité comprise entre les deux bases du cylindre ayant augmenté de :

$$de.ds$$

pendant le même temps *dt*, on a :

$$-\frac{di}{ds} \cdot dt = de,$$

d'où l'équation :

$$\frac{di}{ds} + \frac{de}{dt} = 0. \qquad (4)$$

Le potentiel V_2 est dû à l'électricité qui existe à la surface de R.

Or, un cylindre de longueur l, chargé uniformément à sa surface d'une quantité d'électricité e par unité de longueur, produit en un point de son axe un potentiel exprimé par :

$$2e . \log . \frac{2l}{\rho_0},$$

ou :

$$2e \left[\log 2l - \log \rho_0\right].$$

Le second terme est très grand par rapport au premier, à cause de la petitesse de ρ_0, et on peut écrire approximativement :

$$- 2e \log . \rho_0 .$$

Si la distribution sur le fil n'est pas homogène, on peut

encore employer approximativement la formule précédente, e étant la valeur qui correspond au point considéré. Si le fil n'est pas rectiligne, on peut l'employer également, en négligeant des quantités de l'ordre de celles que nous avons déjà négligées.

Posons :

$$h = -2 \log. \rho_0.$$

L'expression du potentiel au point M sera sensiblement :

$$V_2 = he.$$

De là on déduit :

$$\frac{dV_2}{dx} = h \frac{de}{ds}.$$

En effet on a :

$$dV_2 = \frac{dV_2}{dx} dx + \frac{dV_2}{dy} dy + \frac{dV_2}{dz} dz.$$

Ici, l'axe des x étant parallèle à la tangente en M, on a :

$$\frac{dx}{ds} = 1 \qquad \frac{dy}{ds} = 0 \qquad \frac{dz}{ds} = 0.$$

Il reste donc :

$$dV_2 = \frac{dV_2}{dx} ds,$$

ou comme $dx = ds$:

$$\frac{dV_2}{dx} = h \frac{de}{ds}.$$

105. Calcul de $A \frac{dF_2'}{dt}$. — On a :

$$F_2' = \text{pot}\,(Au_2).$$

Mais u_2 est la projection sur ox du courant i, c'est-à-dire :

$$i \cos \varphi ;$$

φ étant l'angle que fait avec l'axe des x la tangente au fil au point considéré, et par suite on a :

$$F'_2 = \text{pot}\,(\text{A}i \cos \varphi).$$

En répétant le raisonnement que nous avons fait pour le calcul de V_2, on trouverait :

$$F'_2 = \text{A}hi \cos \varphi.$$

Ici, la tangente en M étant parallèle à l'axe des x, il reste :

$$F'_2 = \text{A}hi,$$

d'où :

$$\frac{dF'_2}{dt} = \text{A}h \frac{di}{dt}.$$

106. Calcul de $\text{A}\frac{dF''_2}{dt}$. — Nous allons montrer que ce terme est négligeable vis-à-vis des autres termes de l'équation.

En effet, F''_2 est le potentiel dû à une matière attirante de densité :

$$\frac{\text{A}}{4\pi}\frac{dX_2}{dt}.$$

Pour un point situé à l'intérieur de R, on a $X_2 = - X_1$, d'où :

$$\frac{dX_2}{dt} = - \frac{dX_1}{dt}.$$

Pour les points extérieurs à R, nous allons chercher non pas à calculer exactement la valeur de X_2, mais à nous faire une idée de son ordre de grandeur.

Remarquons d'abord que pour un point pris à la surface on a encore :

$$X_2 = -X_1,$$

puisque la composante tangentielle de la force électrique doit être nulle et que la tangente est ici parallèle à l'axe des x.

Considérons le cas simple où R est un cylindre de révolution de rayon ρ_0 indéfini, et placé dans un champ variable de révolution autour de l'axe du cylindre que nous prenons pour axe des x. Le champ produit par R sera aussi de révolution, et les lignes de force électrique, qui sont aussi les lignes parcourues par les courants de déplacement, seront dans les plans méridiens.

On a une sorte de série de nappes coniques concentrant le courant à la surface de R. Par exemple, l'élément AB et l'élément A'B' (*fig.* 49) engendrent chacun en tournant autour de ox une surface conique, et le flux de force qui traverse la surface AB est égal au flux qui traverse la surface A'B'.

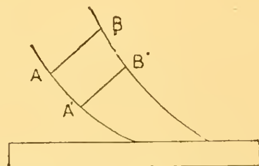


Fig. 49.

Or les surfaces telles que celle engendrée par AB varient en raison inverse de la distance ρ de l'élément AB à l'axe de révolution ox, de sorte que, en un point, X_2 et $X_1 \frac{\rho_0}{\rho}$ sont de même ordre de grandeur.

On peut donc dire que F''_2 est le potentiel dû à une matière dont la densité est du même ordre de grandeur que :

$$\frac{A}{4\pi} \frac{dX_1}{dt} \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Changeons de variables et posons :

$$y = \rho \cos \omega$$
$$z = \rho \sin \omega.$$

F''_2 est de la forme :

$$\int M \frac{\rho_0}{\rho} \frac{d\tau}{r},$$

M étant une quantité de l'ordre de grandeur de $\frac{A}{4\pi} \frac{dX_1}{dt}$ et $d\tau$ représentant un élément de volume.

ρ étant inférieur à r, on peut écrire :

$$\int M \frac{\rho_0}{\rho} \frac{d\tau}{r} < \int M \frac{\rho_0}{\rho^2} d\tau,$$

ou en remplaçant $d\tau$ par sa valeur :

$$\int M \frac{\rho_0}{\rho} \frac{d\tau}{r} < \int M \frac{\rho_0}{\rho^2} \rho . d\rho . d\omega . dx \quad \text{ou} \quad < \int M \rho_0 \frac{d\rho}{\rho} \cdot d\omega . dx.$$

ρ_0 étant la plus petite valeur que puisse prendre ρ, on voit que cette dernière intégrale est au plus de l'ordre de grandeur de :

$$M \rho_0 \log \rho_0.$$

En sorte qu'on peut poser en désignant par θ une quantité finie :

$$F''_2 = \theta . \rho_0 \log \rho . A \frac{dX_1}{dt},$$

d'où :

$$A \frac{dF''_2}{dt} = \theta . \rho_0 . \log \rho_0 . A^2 \frac{d^2X_1}{dt^2}.$$

En remplaçant les différentes expressions qui figurent dans l'équation (3) par leurs valeurs respectives, cette équation devient :

$$X_1 + A^2 h \frac{di}{dt} + A^2\theta.\rho_0 \log \rho_0 \frac{d^2X_1}{dt^2} + h \frac{de}{ds} = 0.$$

Mais on a posé :

$$h = -2 \log \rho_0.$$

Le troisième terme du premier membre, qui renferme le facteur log ρ_0, comme le deuxième et le quatrième, et en même temps le facteur ρ_0, est donc infiniment petit par rapport à ces deux termes, de sorte que l'équation (3) devient :

$$X_1 + h \left(A^2 \frac{di}{dt} + \frac{de}{ds}\right) = 0.$$

Remarquons que cette équation n'est vraie que pour le point M où la tangente est parallèle à ox.

107. Nous allons maintenant généraliser l'équation que nous venons d'obtenir.

Soit S_1 la projection sur la tangente de la force X_1, Y_1, Z_1. Nous pouvons, puisque l'axe des x est parallèle à la tangente au point que nous avons considéré, écrire l'équation précédente :

$$S_1 + h \left(A^2 \frac{di}{dt} + \frac{de}{ds}\right) = 0.$$

Cette équation est maintenant indépendante du choix des axes ; c'est une équation intrinsèque, elle est vraie en tout point M du résonateur.

En la joignant à l'équation (4) que nous avons obtenue

précédemment, nous avons le groupe d'équations :

$$(5) \quad \begin{cases} S_1 + h\left(A^2 \dfrac{di}{dt} + \dfrac{de}{ds}\right) = 0 \\ \dfrac{di}{ds} + \dfrac{de}{dt} = 0 \end{cases}$$

108. Conditions aux limites. — Que se passe-t-il aux extrémités du résonateur et comment pourrons-nous exprimer les conditions aux limites ? C'est ici que nous allons trouver le point faible de la théorie.

Un résonateur peut fonctionner de deux façons : avant que l'étincelle éclate, l'intervalle existant entre les deux boules du micromètre joue le rôle d'un diélectrique. Au moment où l'étincelle éclate, il joue le rôle d'un conducteur.

C'est le premier point qui est surtout intéressant et que nous étudions : on mesure l'amplitude de l'oscillation avant que l'étincelle éclate.

Ce qui résulte le plus naturellement de la théorie de Maxwell, c'est que le courant s'annule aux deux extrémités du résonateur. Nous allons adopter cette hypothèse et en chercher les conséquences ; nous verrons qu'elles ne s'accordent pas tout à fait avec les phénomènes expérimentaux, et nous chercherons à modifier notre hypothèse de façon à la mettre d'accord avec les faits.

Remarquons que la première des équations (5) montre que i et e varient en raison inverse de h ; il ne faudrait pas conclure de là qu'un résonateur est d'autant plus sensible que h est plus petit, c'est-à-dire que le fil est plus gros, car ce qu'on mesure est la différence de potentiel entre les deux extrémités de l'interrupteur, et nous avons vu que l'expression du potentiel était he, qui ne dépend point de h.

Le quotient $-\frac{S_1}{h}$ est une fonction connue, d'après la façon dont nous avons posé le problème ; appelons-la $\varphi(s,t)$; nos équations deviennent alors :

$$(6) \qquad \begin{cases} A^2 \frac{di}{dt} + \frac{de}{ds} = \varphi(s,t) \\ \frac{di}{ds} + \frac{de}{dt} = 0. \end{cases}$$

Éliminons une des deux fonctions inconnues, e par exemple, entre ces deux équations ; pour cela, différentions la première par rapport à t et la deuxième par rapport à s. On obtient :

$$A^2 \frac{d^2 i}{d^2 t} + \frac{d^2 e}{ds.dt} = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d^2 i}{ds^2} + \frac{d^2 e}{dt.ds} = 0.$$

En retranchant ces deux dernières équations membre à membre, il vient :

$$(7) \qquad A^2 \frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{d^2 i}{ds^2} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

De cette équation il nous faut tirer i, en observant les conditions aux limites, qui sont que :

$$i = 0 \text{ pour } \begin{cases} s = 0 \\ s = l \end{cases}$$

l étant la longueur du résonateur.

D'après le théorème de Fourier, on peut écrire :

$$i = \sum B_n \sin \frac{n\pi s}{l}.$$

Chacun des termes de la série s'annule pour $s = o$ et $s = l$; on pourrait démontrer qu'il en résulte que la valeur de la série s'annule pour $s = o$ et $s = l$.

D'ailleurs on aura :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum C_n \sin \frac{n\pi s}{l},$$

les coefficients C_n étant des fonctions supposées connues.

Pour calculer les coefficients du développement de i, il suffit de remplacer dans l'équation (7) i et $\frac{d\varphi}{dt}$ et d'identifier.

On aura :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \sum \cdot \frac{d^2 B_n}{dt^2} \cdot \sin \frac{n\pi s}{l}$$

$$\frac{d^2 i}{ds^2} = - \sum B_n \cdot \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin \frac{n\pi s}{l}.$$

En remplaçant dans l'équation (7) et en égalant les coefficients de $\sin \frac{n\pi s}{l}$ dans les deux membres, on obtient :

$$A^2 \frac{d^2 B_n}{dt^2} + \frac{n^2\pi^2}{l^2} B_n = C_n.$$

109. Résultats. — Les équations telles que l'équation précédente nous définissent les coefficients B, les coefficients C étant des fonctions données de t.

Remarquons que, dans ces équations, il ne figure pas de terme correspondant à l'amortissement des oscillations du résonateur, terme qui serait en $\frac{dB_n}{dt}$.

Il n'y a rien d'étonnant, car nous avons justement négligé dans le calcul les deux causes de cet amortissement, c'est-à-dire :

1° La chaleur de Joule :

2° Les courants de déplacement dûs au résonateur, c'est-à-dire le rayonnement propre du résonateur.

Cherchons maintenant les équations qui définissent les vibrations propres du résonateur ; pour cela, supposons que le résonateur une fois mis en mouvement soit abandonné à lui-même, ce qui revient à faire $\varphi = 0$ dans nos équations.

Les coefficients du développement de $\frac{d\varphi}{dt}$ seront nuls et nous aurons des équations de la forme :

$$A^2 \frac{d^2 B_n}{dt^2} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} B_n = 0.$$

Ces équations nous définissent les différents harmoniques du résonateur ; mais le seul qui ait été observé est le premier ; faisons donc $n = 1$, nous aurons :

$$A_2 \frac{d^2 B_1}{dt^2} + \frac{\pi^2}{l^2} B_1 = 0$$

d'où l'on tire :

$$B_1 = \cos \frac{\pi t}{A l}.$$

Ainsi la période est $2Al$ et, par suite, la longueur d'onde $2l$, c'est-à-dire deux fois la longueur du résonateur ; or, MM. Sarasin et de la Rive ont trouvé expérimentalement que cette longueur d'onde est égale à huit fois le diamètre du résonateur, de sorte que la longueur d'onde théorique est à la longueur d'onde expérimentale dans le rapport $\frac{\pi}{4}$.

Il est à penser que, même en conduisant le calcul d'une manière plus rigoureuse, la théorie, telle que nous l'avons

exposée, ne conduirait pas au même résultat que l'expérience, car la différence précédente est considérable. Il nous faut donc modifier cette théorie.

110. Modifications à apporter à la théorie. — Devons-nous modifier notre mode de raisonnement, basé sur la théorie de Maxwell, ou bien les conditions aux limites ?

Occupons-nous d'abord des conditions aux limites. MM. Sarasin et de la Rive ont étudié, comme nous l'avons vu, la propagation des oscillations électriques le long d'un fil coupé brusquement. Le résonateur circulaire qu'ils employaient avait $0^m,70$ de diamètre ; la distance d'un nœud à un ventre devait donc être $\frac{8 \times 0^m,70}{4} = 1^m,40$. C'est bien ce qu'ils ont trouvé tout le long du fil, excepté à l'extrémité : le nœud qui existait pour le courant à l'extrémité du fil n'était qu'à $1^m,10$ du ventre le plus proche.

Ces expériences, faites sur un fil rectiligne, permettent de concevoir que, dans un résonateur circulaire, il y a des perturbations analogues.

On peut, pour essayer d'expliquer ces perturbations, supposer que les extrémités ont une certaine capacité, ce que nous avons négligé dans les calculs. Mais l'effet de faibles capacités est bien peu considérable et ne peut complètement expliquer des écarts aussi grands entre la théorie et l'expérience.

Il est donc probable qu'il faut modifier de quelque façon la théorie, sans que cela change d'ailleurs le sens général des autres résultats [1].

[1] Voir à ce sujet la note de MM. Birkeland et Sarasin dans les *Comptes rendus*, 1893, deuxième semestre.

111. Nous avons supposé (paragraphe 91) qu'une même force électrique appliquée en différents points du résonateur n'avait pas la même action. Nous allons vérifier que nos équations conduisent bien à ce résultat.

Reprenons l'équation :

$$A^2 \frac{d^2B_1}{dt^2} + \frac{\pi^2}{l^2} B_1 = C_1.$$

Sans qu'il soit besoin de l'intégrer, on voit que l'effet de l'excitateur est d'autant plus grand que C_1 est plus grand lui-même. Calculons donc C_1 ; en appliquant la formule de Fourier, on a :

$$C_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin \frac{\pi s}{l} \, ds.$$

Suivant la position du point M, le coefficient de $\frac{d\varphi}{dt}$ a une valeur variable ; pour le point A (*fig.* 50) on a $s = 0$, d'où :

$$\sin \frac{\pi s}{l} = 0.$$

Pour B, $s = \frac{l}{2}$, $\sin \frac{\pi s}{l} = 1$; enfin, pour C, $\sin \frac{\pi s}{l} = 0$.

Ainsi, l'effet de la force électrique est maximum au point B, ce que Hertz avait prévu par analogie avec ce qui se passe pour une corde vibrante.

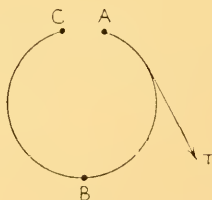


Fig. 50.

Nous avons vu d'ailleurs que le raisonnement de Hertz était pleinement justifié par l'étude de la propagation des perturbations électriques dans l'air ; nous allons voir qu'il l'est de même par l'étude de la propagation le long d'un fil.

112. Nœuds et ventres dans la propagation le long d'un fil. — Lorsqu'on étudie au moyen d'un résonateur la propagation dans un fil, on peut placer le résonateur de différentes façons par rapport au fil.

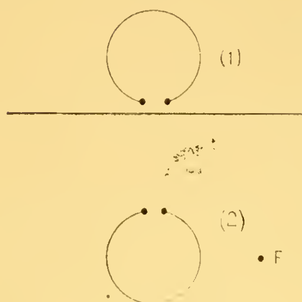


Fig. 51.

1° On peut le mettre dans un plan passant par le fil, le micromètre étant placé contre le fil (*fig.* 51, position 1) ;

2° Le plan du résonateur peut être perpendiculaire au fil, le micromètre étant placé comme l'indique la figure (position 2).

Voyons ce qui se passe dans chacun de ces cas et examinons d'abord le second.

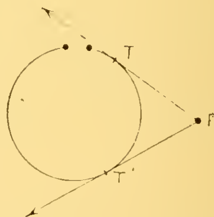


Fig. 52.

Les deux composantes tangentielles de la force provenant du fil F, appliquées en T et en T′, tendent à produire dans le résonateur des courants de sens inverses (*fig.* 52) ; mais, quoique ces forces soient égales, leurs effets ne se détruisent pas, à cause du facteur :

$$\sin \frac{\pi s}{l},$$

qui, comme nous venons de le voir, n'a pas la même valeur aux deux points T et T′ ; c'est la force appliquée en T′ qui exerce l'effet le plus considérable ; en somme, la résultante

des actions de ces deux forces est proportionnelle à :

$$F\left(\sin\frac{\pi s'}{l} - \sin\frac{\pi s}{l}\right),$$

où s et s' sont les deux valeurs de s qui correspondent aux points T et T'.

Ce raisonnement nous montre que, dans ce cas, les maxima et minima de l'étincelle sont les mêmes que ceux de la force électrique F.

Prenons le fil comme axe des z et désignons par ρ la distance d'un point M au fil. Nous avons déjà étudié (paragraphe 45) une fonction Π de t, ρ et z telle que la force magnétique et le courant sont proportionnels à :

$$\frac{d^2\Pi}{d\rho.dt}$$

et la composante active de la force électrique à :

$$\frac{d^2\Pi}{d\rho.dz}.$$

Ici on a :

$$\Pi = A \cos\alpha z.\cos\beta t,$$

A étant une fonction de ρ. De là on déduit :

$$\frac{d^2\Pi}{d\rho.dt} = -\beta\frac{dA}{d\rho}.\cos\alpha z.\sin\beta t$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\rho.dz} = -\alpha\frac{dA}{d\rho}.\sin\alpha z.\cos\beta t$$

Ces expressions montrent que les maxima de la force électrique correspondent aux minima du courant et inversement. En particulier, à l'extrémité du fil, le courant est nul, la

force électrique doit donc être maxima et, d'après ce que nous venons de voir, il doit y avoir aussi un maximum d'effet sur le résonateur placé comme nous le supposons : c'est bien ce que l'expérience vérifie.

Dans les idées de M. Bjerknes, l'action d'une perturbation passant dans le fil sur le résonateur peut être assimilée à un choc ; alors, si l'intervalle des deux chocs produits par la perturbation à l'aller et au retour est un multiple de la période, on a un maximum d'effet ; en particulier, à l'extrémité, l'intervalle étant nul peut être considéré comme un multiple de la période et il doit y avoir un maximum d'effet, ce qui est bien d'accord avec ce qui précède.

113. Examinons maintenant ce qui se produit quand le résonateur est placé dans la position indiquée par la figure 53.

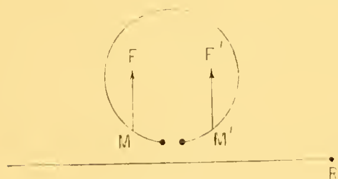


Fig. 53.

Considérons les forces électriques appliquées en deux points symétriques par rapport à un plan perpendiculaire au fil et passant par le milieu du micromètre à étincelles. Les deux coefficients d'efficacité sont ici les mêmes, les arcs qui correspondent aux points M et M′ étant égaux.

Les deux forces F et F′ produisant d'ailleurs des effets opposés, l'intensité de l'étincelle sera proportionnelle à la différence des deux forces F et F′. Si le micromètre est placé en un point qui correspond à un maximum de la force électrique, on a :

$$MF = M'F' ;$$

c'est-à-dire que ce point, qui tout à l'heure était un ventre, est maintenant un nœud pour l'étincelle, et inversement un nœud devient un ventre.

Les maxima et les minima trouvés avec les deux positions du résonateur sont donc intervertis.

Nous avons vu que, dans le cas précédent, les résultats expérimentaux étaient d'accord avec les idées de M. Bjerknes. Il nous est facile de voir qu'il en est encore de même.

En effet, considérons les chocs produits en M et M' par la perturbation directe ; après réflexion il se produit deux nouveaux chocs.

Le premier choc en M produit dans le résonateur un courant :

$$i = F\ (t)$$

et le premier en M':

$$F\ (t - h).$$

La perturbation réfléchie en R revient en M' un temps K après avoir passé en M et donne lieu à un courant :

$$F\ (t - k).$$

Enfin, l'effet du deuxième choc en M est :

$$F\ (t - k - h).$$

En tenant compte du changement de signe dû à la réflexion et de ce que les actions produites en M et en M' sont de signes contraires, on voit que l'intensité totale est :

$$i = F\ (t) - F\ (t - h) - F\ (t - k) + F\ (t - k - h)$$

Si k est un multiple entier de la période, comme F (t) est

une fonction périodique, les termes de l'expression précédente se détruisent deux à deux, car on a :

$$F(t) = F(t - k)$$
$$F(t - h) = F(t - k - h)$$

Et ces valeurs de k doivent correspondre à des nœuds avec ce mode d'observation ; en particulier, l'extrémité du fil devra être un nœud : tout ceci est bien d'accord avec l'expérience.

114. Remarque. — Supposons qu'on emploie le résonateur de M. Blondlot et qu'on place le côté AB parallèlement au fil (*fig.* 54). Il semble que le fil ne doive exercer aucune action sur le résonateur, puisque la force électrique qui est normale au fil d'après la théorie de Maxwell est également normale au fil AB. C'est là un paradoxe auquel nous pouvons répondre de la façon suivante :

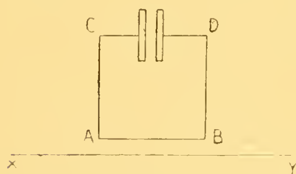


Fig. 54.

De ce que les lignes de force électrique aboutissent normalement à un conducteur il ne faut pas conclure que le courant est nul à la surface de ce conducteur ; la charge électrique d'une portion de surface est proportionnelle au nombre des lignes de force qui y aboutissent et varie périodiquement comme ce nombre.

Dans l'équation :

$$A^2 \frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{d^2 i}{ds^2} = \frac{d\varphi}{dt},$$

il faudra, puisque la force électrique est normale à AB, faire :

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

L'équation ainsi modifiée ne veut pas dire du tout que le courant i est nul, mais exprime seulement que la perturbation se propage avec la vitesse de la lumière.

Dans les idées de M. Bjerknes, un premier choc se produit quand la perturbation arrive en A et produit un courant d'intensité :

$$F(t).$$

Un deuxième choc se produit en B et produit un courant :

$$F(t - h).$$

L'intensité totale du courant dû à ces deux chocs est :

$$i = F(t) - F(t - h)$$

ou sensiblement, comme h, temps que la perturbation met à parcourir une longueur égale à AB, est assez petit :

$$i = h.F'(t).$$

L'intensité de l'effet produit est ainsi proportionnelle à la longueur AB et on voit que cette proportionnalité n'implique pas que c'est le fil AB qui soit le siège de l'action.

Quand un résonateur circulaire se trouve entouré par le fil conducteur (*fig.* 55), on obtient parfaitement des étincelles bien que les deux fils soient parallèles. Peut-on conclure de là que la force électrique doit avoir une composante longitudinale ?

Évidemment non. Les lignes de force aboutissent normalement au conducteur, puis se recourbent à mesure qu'elles s'en éloignent ; elles se déplacent avec une vitesse égale à celle de la lumière. Or, quand la ligne de force passe en E, elle ne coupe pas le fil du résonateur ; après avoir dépassé A, elle le coupe ; il y a donc une certaine position dans laquelle elle est tangente au fil, ce qui fait comprendre comment l'action peut se produire.

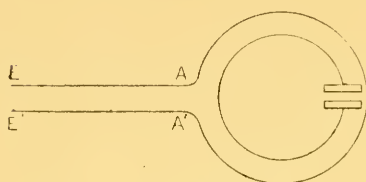


Fig. 55.

115. Réflexion des oscillations hertziennes. Ordre de grandeur de la couche superficielle. — Nous avons vu que les courants oscillatoires très rapides étaient limités à une certaine couche superficielle. Nous allons chercher à nous faire une idée de l'épaisseur de cette couche et pour cela nous allons considérer le cas simple de la réflexion sur un miroir métallique d'une onde plane parallèle au miroir.

Dans le diélectrique, on pourra appliquer les équations de la forme :

$$A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}$$

et dans le métal qui constitue le miroir :

$$A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A\lambda X,$$

dans lesquelles μ représente le pouvoir magnétique, ε le pouvoir diélectrique du métal, et λ sa conductibilité électrique, en mesures électrostatiques.

Prenons pour plan des x, y le plan de séparation du métal et de l'air.

La force électrique et la force magnétique ne dépendent que de z et de t et sont toutes deux dans le plan de l'onde, perpendiculaires entre elles ; choisissons l'axe des x parallèle à la force électrique, et par suite oy parallèle à la force magnétique.

On a alors :

$$Y = Z = 0$$
$$L = N = 0$$

et nos équations se réduisent dans l'air à :

$$A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz}$$
$$A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz}$$

et dans le métal à :

$$A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz}$$
$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - 4\pi A\lambda X.$$

Prenons comme sens positif de oz la partie dirigée vers l'air et posons :

$$X = a.e^{i(\alpha z + pt)}$$
$$M = b.e^{i(\alpha z + pt)}.$$

En choisissant convenablement les rapports $\frac{\alpha}{p}$ et $\frac{b}{a}$, on

pourra satisfaire aux équations du mouvement dans l'air au moyen des expressions précédentes. On satisfera encore à ces équations en ne conservant que les parties réelles de X et de M, ce qui nous donnera les équations de l'onde plane incidente.

On satisfera encore à ces équations par des expressions de la forme :

$$X = a'.e^{i(-\alpha z+pt)}$$
$$M = b'e^{i(-\alpha z+pt)}$$

dont les parties réelles nous définiront l'onde réfléchie.

Enfin des expressions de la forme :

$$X = a''.e^{(\beta z+pt)}$$
$$M = b''.e^{(\beta z+pt)}$$

pourront satisfaire, par un choix convenable de $\frac{b''}{a''}$ et de $\frac{\beta}{p}$, aux équations dans le métal et nous donneront les équations de l'onde dans la couche superficielle du métal où pénètre la perturbation.

Nous avons à écrire qu'il y a continuité entre les expressions de la force électrique à l'intérieur et à l'extérieur du métal, c'est-à-dire qu'on doit avoir, pour $z = 0$:

$$a.e^{i(\alpha z+pt)} + a'e^{i(-\alpha z+pt)} = a''e^{i(\beta z+pt)},$$

ce qui donne :

$$a + a' = a''.$$

On trouverait de même :

$$b + b' = b''.$$

Substituons dans nos équations à X et M les expressions que nous avons écrites. Nous aurons dans l'air :

$$AipM = i\alpha X$$
$$AipX = i\alpha M$$

ou, en remplaçant dans ces équations homogènes X et M par les quantités proportionnelles a et b :

$$Apb = a\alpha$$
$$Apa = b\beta$$

d'où l'on tire :

$$A^2p^2 = \alpha^2 \qquad \text{et :} \qquad \alpha = \pm Ap.$$

le signe $+$ correspondra à l'onde incidente et le signe $-$ à l'onde réfléchie ; on aura :

$$\alpha = Ap \quad \text{d'où} \quad \frac{b}{a} = 1 \text{ pour l'onde incidente.}$$

$$\alpha = -Ap \quad \text{d'où} \quad \frac{b'}{a'} = -1 \quad \text{— réfléchie.}$$

Les équations s'appliquant à un point situé dans le métal donnent :

$$A\mu ipM = i\beta X$$
$$A\varepsilon ipX = i\beta M - 4\pi A\lambda X$$

Ce qu'on peut écrire en divisant par i :

$$A\mu pM = \beta X$$
$$A\varepsilon pX - 4\pi i A\lambda X = \beta M.$$

Éliminons M et X entre ces deux relations ; il vient :

$$A^2\mu(\varepsilon p - 4\pi i\lambda) = \beta^2.$$

Cette relation nous définit β ; cherchons les valeurs des termes qui y figurent.

A^2 est l'inverse du carré de la vitesse de la lumière.

μ est égal à 1 pour les métaux non magnétiques ; il a une valeur plus élevée pour les métaux magnétiques, pouvant aller jusqu'à 30 dans le cas du fer.

p, dans le cas des expériences de Hertz, a pour ordre de grandeur $\pi 10^8$.

ε est une quantité inconnue, mais finie, que nous pouvons supposer dans une première approximation égale à l'unité.

λ est la conductibilité spécifique du métal ; pour le cuivre, on a à peu près, en prenant les unités électromagnétiques :

$$\lambda = 1,25 \times 10^{-4}.$$

Avec les unités électrostatiques que nous employons ici, il nous faut prendre :

$$\lambda = 1,25.10^{-4}.9.10^{20},$$

ou sensiblement :

$$\lambda = 10^{17}$$

Le rapport de la partie réelle de β^2 au coefficient de la partie imaginaire a donc pour ordre de grandeur :

$$\frac{\pi.10^8}{4\pi.10^{17}} = \frac{1}{4.10^9}.$$

En conséquence, nous pouvons négliger la partie réelle devant l'autre, ce qui nous dispense de connaître exactement ε.

Supposons que nous ayons affaire à la réflexion métallique de la lumière ; il nous faudra changer alors la valeur de p et

prendre :

$$p = \pi.10^{15};$$

le rapport précédent deviendra :

$$\frac{1}{400}.$$

Si on compare les résultats obtenus dans l'étude de la réflexion métallique lumineuse à ceux donnés par la formule :

$$A^2\mu p(\varepsilon p - 4\pi i\lambda) = \beta^2,$$

on pourra déduire approximativement de cette comparaison les valeurs de ε et de λ.

On trouve ainsi pour ε une valeur négative pour presque tous les métaux, ce qui n'est guère admissible.

De plus, on trouve pour λ des valeurs bien différentes de celles qui définissent la conductibilité dans les conditions ordinaires, 3 ou 400 fois plus faibles que celles-ci ; ainsi, dans ce cas, les deux termes qui figurent dans l'expression de β^2 deviennent du même ordre de grandeur.

On peut se demander si des complications de ce genre n'interviennent pas déjà dans la propagation des oscillations électriques rapides.

116. Quoi qu'il en soit, négligeons, comme nous l'avons dit tout à l'heure, la partie réelle devant la partie imaginaire ; il reste :

$$\beta^2 = -i.A^2 p\mu\lambda.4\pi,$$

ou :

$$\beta = A\sqrt{4\pi p\mu\lambda}. \quad \sqrt{-i}$$

Mais :

$$\sqrt{-i} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}},$$

d'où l'on déduit :

$$\beta = \Lambda\sqrt{2\pi p\mu\lambda}\,(1 - i).$$

Posons :

$$\beta' = \Lambda\sqrt{2\pi p\mu\lambda},$$

il vient :

$$\beta = \beta'(1 - i).$$

Posons :

$$a'' = a''_0 e^{i\varphi}$$

et remarquons que :

$$\beta i = \beta' i + \beta'.$$

L'expression de X dans le métal peut alors s'écrire :

$$X = a''_0 . e^{i\varphi} . e^{ipt} . e^{\beta' iz} . e^{\beta' z}.$$

Cette expression de X est imaginaire ; mais la partie réelle est également une solution de nos équations. C'est :

$$X = a''_0 . e^{\beta' z} . \cos(\beta' z + pt + \varphi).$$

X est ainsi une fonction périodique amortie et l'amplitude des oscillations est à une profondeur z mesurée par

$$e^{\beta' z}$$

en prenant pour unité l'amplitude à la surface.

Cette amplitude est plus faible que l'unité, car β' est positif et z est négatif, l'axe des z positif étant dirigé du côté de l'air.

Cherchons à quelle profondeur elle sera devenue e^{-1} ;

cette profondeur sera :

$$z = \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\Lambda\sqrt{2\pi p\lambda\mu}}.$$

Supposons que le métal ne soit pas magnétique. Alors $\mu = 1$ et il vient :

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\pi.\lambda\Lambda^2 p}}.$$

Nous savons que $\lambda.\Lambda^2 = 1{,}25.10^{-4}$ pour le cuivre et que

$$p = \pi.10^8.$$

On aura donc :

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\pi.1{,}25.10^{-4}.\pi.10^8}}$$

$$= \frac{1}{100.\pi\sqrt{2.1{,}25}}$$

$$= \frac{1}{500} \text{ de centimètre environ}$$

ou :

$$\frac{1}{50} \text{ de millimètre.}$$

La formule donnant z nous montre que la pénétration est d'autant plus profonde que les oscillations sont plus lentes ; la profondeur est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{p}}$, c'est-à-dire à la racine carrée de la longueur d'onde : elle sera bien plus faible pour les ondulations lumineuses que pour les oscillations électriques telles qu'on les a produites jusqu'ici.

Mais, d'autre part, le rapport de la pénétration à la longueur d'onde est inversement proportionnel à la racine carrée

de cette longueur d'onde : il est donc d'autant plus grand que celle-ci est plus petite, ce qui montre que la nature du métal doit influer davantage sur les phénomènes lumineux que sur les phénomènes électriques.

Remarquons enfin que la pénétration est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$: elle est donc plus faible pour les métaux magnétiques que pour les métaux non magnétiques.

117. Réflexion oblique. — Nous ne nous sommes occupés dans ce qui précède que du cas de l'incidence normale ; voyons maintenant comment on pourrait calculer la pénétration, dans le cas de l'incidence oblique.

Prenons pour plan des yz le plan d'incidence. Les équations de l'onde ne dépendront ainsi que de y, z et t et nous pourrons poser :

$$X = ae^{i(\alpha z + \gamma y + pt)}.$$

Cette relation représente l'onde incidente, la tangente de l'angle d'incidence étant égale à $\frac{\gamma}{\alpha}$.

L'onde réfléchie et celle qui pénètre dans le métal seront définies par :

$$X = a'.e^{i(-\alpha z + \gamma y + pt)}$$
$$X = a''.e^{i(\beta z + \gamma y + pt)}.$$

Par un calcul analogue à celui que nous avons fait dans le cas de l'incidence normale, on trouverait :

$$\alpha^2 + \gamma^2 = A^2 p^2$$

Ce qui montre que γ est inférieur en valeur absolue à Ap.

On aurait aussi :

$$A^2\mu p[\varepsilon p - 4\pi i\lambda] = \beta^2 + \gamma^2,$$

d'où :

$$\beta^2 = A^2\mu p^2\varepsilon - \gamma^2 - 4\pi . A^2\mu p i\lambda.$$

Comme précédemment, le premier terme est négligeable par rapport au troisième. Il en est de même du deuxième, puisque γ est inférieur à Ap, de sorte qu'on peut écrire :

$$\beta^2 = -4\pi A^2\mu p i\lambda.$$

Nous retrouvons ainsi pour β la même valeur que dans le cas de l'incidence normale, de sorte que nos conclusions sont encore les mêmes.

118. Nous allons nous servir des résultats précédents pour voir si, dans le cas que nous étudions, la force électrique est bien normale au conducteur ; pour cela nous distinguerons deux cas, suivant que la force électrique est perpendiculaire au plan d'incidence ou contenue dans ce plan.

I. — La force électrique est supposée perpendiculaire au plan d'incidence, ou, si on veut, le plan de polarisation coïncide avec le plan d'incidence.

Parmi les composantes X, Y, Z, L, M, N, les seules qui soient différentes de o sont :

X, M et N.

Pour l'onde incidente, on a :

$$X = \text{partie réelle de } ae^{i(\alpha z + \gamma y + pt)},$$

pour l'onde réfléchie :

$$X = \text{partie réelle de } a'e^{i(-\alpha z + \gamma y + pt)}$$

et pour l'onde se propageant à l'intérieur du métal :

$$X = \text{partie réelle de } a'' e^{i(\beta z + \gamma y + pt)}.$$

Dans le cas de la réflexion vitreuse, j désignant l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction, le rapport des coefficients d'amplitude est :

$$\frac{a'}{a} = \frac{\sin(r - j)}{\sin(r + j)} = \frac{\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} j}{\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} j}.$$

Remplaçons dans le cas présent $\operatorname{tg} j$ par $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\operatorname{tg} r$ par $\frac{\gamma}{\beta}$, on aura :

$$\frac{a'}{a} = \frac{\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}. \qquad (1)$$

D'ailleurs, on a :

$$\alpha = \mathrm{A}p \cos j$$
$$\gamma = \mathrm{A}p \sin j$$
$$\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = (1 - i)\,\mathrm{A}\sqrt{2\pi\lambda p\mu}.$$

D'après ce que nous avons vu, γ est négligeable par rapport à β et on a sensiblement :

$$\beta = (1 - i)\,\mathrm{A}\sqrt{2\pi\lambda p\mu}.$$

Cauchy a démontré que la formule (1) s'applique encore au cas de la réflexion métallique. Le rapport $\frac{a'}{a}$ défini par (1) est imaginaire, mais son module représente le rapport des amplitudes, et son argument la différence de phase.

Posons :

$$\rho = \frac{\mathrm{A}p}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$$

ou sensiblement :

$$\theta = \frac{\Lambda p}{\beta}.$$

On peut alors écrire :

$$\frac{a'}{a} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = -\frac{1 - \frac{\alpha}{\beta}}{1 + \frac{\alpha}{\beta}}$$

ou sensiblement :

$$\frac{a'}{a} = -\left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right).$$

En remplaçant α par $\Lambda p \cos j$, il vient :

$$\frac{a'}{a} = -\left(1 - 2\frac{\Lambda p}{\beta}\cos j\right)$$
$$= -(1 - 2\theta \cos j)$$

En remplaçant dans l'expression de θ les quantités qui y figurent par leurs valeurs approchées, on trouve comme valeur approximative :

$$\theta = \frac{1 + i}{100\,000}.$$

On voit donc que le rapport $\frac{a'}{a}$ est très voisin de -1, c'est-à-dire que les amplitudes sont égales et de signes contraires, et que la différence de phase est égale à π, à des quantités près de l'ordre de $\frac{1}{100\,000}$.

II. — La force électrique est contenue dans le plan d'incidence, ou, si on veut, le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence.

Les composantes qui sont alors différentes de o sont :

$$L, \quad Y, \quad Z.$$

La théorie de la réflexion montre que, pour cette position du plan de polarisation, le rapport des coefficients est :

$$\frac{b'}{b} = \frac{\sin 2j - \sin 2r}{\sin 2j + \sin 2r}$$

Cauchy a démontré que la même formule s'applique au cas de la réflexion métallique.

L'angle r est petit ; on peut sensiblement écrire :

$$\frac{\sin r}{\sin j} = \theta.$$

On peut alors transformer l'expression de $\frac{b'}{b}$.

$$\frac{b'}{b} = \frac{\sin 2j - \sin 2r}{\sin 2j + \sin 2r} = \frac{1 - \frac{\sin 2r}{\sin 2j}}{1 + \frac{\sin 2r}{\sin 2j}}$$

ou sensiblement :

$$\frac{b'}{b} = 1 - 2\frac{\sin 2r}{\sin 2j}.$$

r étant petit on peut sensiblement écrire $\sin 2r = 2 \sin r$.

Alors :

$$\frac{b'}{b} = 1 - \frac{4 \sin r}{2.\sin j.\cos j} = 1 - \frac{2\theta}{\cos j}.$$

La différence de phase sera donc de l'ordre de θ, c'est-à-dire de $\frac{1}{100.000}$ et le rapport des amplitudes sera très voisin de l'unité.

Figurons la force électrique OJ dans l'onde incidente (*fig.* 56) ; elle est dans le plan d'incidence, qui est pris pour plan de la figure. La force électrique OR dans la vibration réfléchie fait avec la normale ON un angle égal à l'angle NOJ (les angles NOJ et NOR sont les compléments des

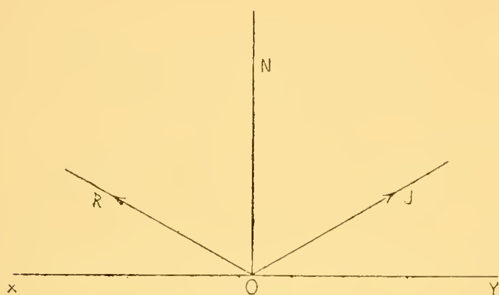


Fig. 56.

angles d'incidence). Si OJ et OR sont égales, leur résultante est dirigée suivant ON ; or nous venons de voir qu'il en est ainsi à des quantités près de l'ordre de θ ; la force électrique fait donc avec la normale un angle de quelques secondes d'arc.

119. Ordre de grandeur de la chaleur de Joule produite à la surface d'un conducteur. — Soit J l'intensité du courant qui règne dans un parallélipipède ayant la pénétration pour largeur et une dimension parallèle au courant.

La chaleur de Joule produite pendant l'unité de temps est proportionnelle à :

$$RJ^2.$$

L'intensité J du courant ne dépend pas de la nature du conducteur, elle sera seulement répartie sur une profondeur

plus ou moins grande. La chaleur de Joule est proportionnelle à R, c'est-à-dire à $\frac{\beta'}{\lambda}$, ou à :

$$\frac{\sqrt{\lambda p \mu}}{\lambda} = \sqrt{\frac{p\mu}{\lambda}}.$$

Ainsi, elle varie en sens inverse de la longueur d'onde, puisque p figure au numérateur, et de la conductibilité λ.

Elle est plus grande pour les métaux magnétiques que pour les autres.

Nous allons maintenant exposer quelques expériences qui constituent une vérification des résultats que nous avons obtenus au moyen de considérations théoriques.

120. Expériences de Hertz sur l'épaisseur de la couche superficielle où pénètre le courant. — Hertz a montré qu'une feuille d'or très mince, de $\frac{1}{20}$ de millimètre d'épaisseur environ, suffit pour arrêter les vibrations et former écran : pour cela il enveloppait un résonateur d'un manchon annulaire formé d'une telle feuille d'or, ce qui empêchait les étincelles de se produire.

121. Influence de la nature du métal. — Hertz a fait des expériences avec des résonateurs identiques de forme, mais de métaux différents : exposés à un excitateur, tous donnaient des étincelles de même longueur ; il semble résulter de là que la nature du conducteur est sans action sur les phénomènes.

122. Expériences de M. Bjerknes. — M. Bjerknes a obtenu des résultats qui modifient cette conclusion : il fit

construire six résonateurs géométriquement identiques, ayant 123 centimètres de longueur de fil ; le diamètre du fil était de 1/2 millimètre. Ces résonateurs étaient formés de métaux différents : cuivre, laiton, argent, platine, nickel, fer.

Dans chaque résonateur, les boules du micromètre à étincelles étaient remplacées par deux petits plateaux, entre lesquels était suspendue une aiguille d'aluminium. Les mouvements de cette aiguille permettaient d'étudier le champ variable produit entre les deux plateaux. En somme, la disposition précédente est analogue à celle employée déjà par M. Bjerknes, que nous avons décrite plus haut ; les quadrants de l'électromètre sont remplacés par les deux petits plateaux et son aiguille par la petite aiguille d'aluminium.

M. Bjerknes soumet chacun de ses résonateurs à l'influence d'un même excitateur et mesure la dérivation de l'aiguille ; il se sert successivement de plusieurs excitateurs, de périodes différentes, et peut construire, pour chaque résonateur, une courbe dans laquelle les abscisses représentent les longueurs d'onde des excitateurs, et les ordonnées les déviations correspondantes de l'aiguille.



Fig. 57.

Pour le résonateur de cuivre par exemple, cette courbe a la forme représentée par la figure 57.

Si nous réunissons sur une même figure les courbes qui correspondent aux six résonateurs, nous obtenons la figure 58.

Les maxima correspondent tous à une même abscisse (sauf une légère déviation vers la droite pour le fer et le nickel, métaux magnétiques). Cela montre que la nature du métal dont est formé le résonateur n'influe pas sur la longueur d'onde.

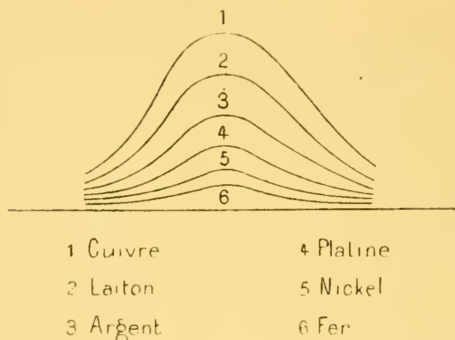


Fig. 58.

D'ailleurs, les déviations qui correspondent à une même abscisse ne sont pas les mêmes pour les différents résonateurs, ce qui paraît en contradiction avec le résultat des expériences de Hertz dont nous venons de parler.

Mais cette contradiction n'est qu'apparente, car les quantités mesurées dans les deux séries d'expériences ne sont pas les mêmes.

Soit V la différence de potentiel au temps t entre les deux extrémités du résonateur; Hertz mesure le maximum de V, tandis que M. Bjerknes mesure l'intégrale :

$$\int V^2 . dt$$

ou, si on veut, la valeur moyenne de V^2.

Or le maximum de V peut parfaitement être le même avec

les différents résonateurs sans qu'il en soit de même de la valeur moyenne de V^2 : la conclusion à tirer des deux séries d'expériences est que la nature du métal n'influe pas sur le maximum d'énergie mise en jeu, mais influe sur la rapidité de la dissipation de l'énergie.

M. Bjerknes a calculé l'amortissement α pour chacun de ses résonateurs; nous avons vu (paragraphe 83) comment il pouvait calculer cet amortissement et nous avons trouvé que la déviation E de l'aiguille de l'électromètre (c'est-à-dire ici celle de l'aiguille d'aluminium) était proportionnelle à

$$\frac{B^2}{4\alpha},$$

B désignant la valeur maximum de V ; B étant indépendant du métal d'après les expériences de Hertz, α sera d'autant plus grand que la déviation E sera plus petite.

L'amortissement de l'excitateur étant 0,26, M. Bjerknes a trouvé :

Pour le	résonateur	de cuivre,	0,002
»	»	de fer,	0,018
»	»	de platine,	0,004

Pour mieux comparer deux des courbes de la figure 58, par exemple celles qui correspondent au platine et au cuivre, faisons varier proportionnellement les ordonnées de l'une d'elles, de manière à amener les sommets des deux courbes à coïncider; nous obtenons la figure 59 : la courbe correspon-

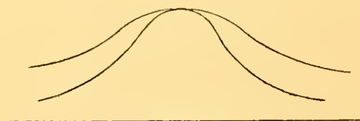


Fig. 59.

dant au platine est au-dessus de celle qui correspond au cuivre, ce qui veut dire que la résonance est plus accentuée avec le cuivre qu'avec le platine ; l'amortissement est plus considérable avec le platine qu'avec le cuivre ; si l'amortissement était nul, on arriverait à une courbe analogue à celle de la figure 60.



Fig. 60.

123. Énergie perdue sous forme de chaleur. — Les expériences de M. Bjerknes conduisent à d'autres résultats.

Choisissons les valeurs de la déviation qui correspondent pour chaque résonateur à la meilleure résonance, c'est-à-dire les maxima de E, et construisons une courbe en portant en abscisses les résistances spécifiques des métaux constituant les résonateurs, c'est-à-dire $\frac{1}{\lambda}$, et en ordonnées ces valeurs de E.

Nous obtenons quatre points, correspondant aux métaux suivants : cuivre, laiton, argent, platine, qui se trouvent bien sur une même courbe continue, tandis que les points correspondant au fer et au nickel se trouvent au-dessous de cette courbe (fig. 61).

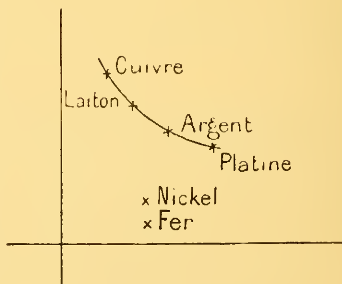


Fig. 61.

La forme de la courbe montre que, pour les métaux non magnétiques, la dissipation d'énergie est d'autant plus grande que la résistance spécifi-

que est plus grande, ce qui conduit à supposer que cette dissipation est due surtout à la chaleur de Joule.

En effet, nous avons vu (paragraphe 119) que la chaleur de Joule est proportionnelle à $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$, c'est-à-dire à la racine carrée de la résistance spécifique.

D'autre part, nous avons vu, dans le même paragraphe, que cette quantité de chaleur est proportionnelle à $\sqrt{\mu}$, ce qui conduit bien à assigner aux points correspondant aux métaux magnétiques, fer et nickel, la place qu'ils occupent en effet sur la figure.

La quantité d'énergie perdue est la somme de celle qui est perdue par rayonnement et de celle qui est transformée en chaleur. Cette dernière étant proportionnelle à $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$, on peut poser :

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\lambda}}$$

α étant la valeur du décrément logarithmique ou coefficient d'affaiblissement. Le terme α_0, correspondant au rayonnement, ne dépendra probablement pas du métal, c'est-à-dire sera indépendant de λ.

Construisons une courbe en prenant pour abscisses les valeurs de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et pour ordonnées celles de α; nous devrons obtenir une droite : la courbe véritable se rapproche en effet d'une droite (*fig.* 62).

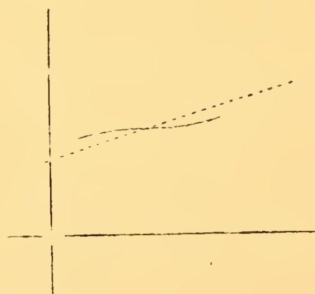


Fig. 62.

En prolongeant cette droite jusqu'à son point de rencontre avec *oy*, on aura α_0.

M. Bjerknes a ainsi cherché pour chaque métal la proportion de l'énergie perdue qui est transformée en chaleur.

Pour le cuivre, par exemple, on trouve que les $\frac{3}{4}$ de l'énergie perdue le sont par rayonnement, $\frac{1}{4}$ étant transformé en chaleur.

Pour le platine, $\frac{3}{8}$ par rayonnement, $\frac{5}{8}$ en chaleur.

Pour le fer, il y a une certaine quantité d'énergie perdue à cause du phénomène de l'hystérésis ; il est difficile de se rendre compte de son importance.

124. Expériences de M. Bjerknes sur l'épaisseur de la couche superficielle. — M. Bjerknes a complété ses expériences en cherchant l'épaisseur de la couche superficielle où le courant pénètre dans les différents métaux. Pour cela, il dépose électrolytiquement à la surface du métal constituant un résonateur une couche d'un autre métal, dont il augmente l'épaisseur jusqu'à ce que le résonateur se comporte comme s'il était formé de ce second métal.

Par exemple, répétons les expériences précédemment décrites au moyen d'un résonateur de fer : on obtient une certaine déviation ; recouvrons le résonateur d'une couche de cuivre et répétons à nouveau les expériences : la déviation est plus grande que tout à l'heure et elle augmente à mesure que l'épaisseur de la couche de cuivre augmente, jusqu'à ce que celle-ci atteigne une certaine limite, à partir de laquelle la déviation reste la même, et est celle qui correspond à un résonateur de cuivre. C'est que la perturbation

ne pénètre pas plus loin et l'épaisseur limite est celle qui correspond au cuivre.

M. Bjerknes a ainsi trouvé pour le cuivre $\frac{1}{100}$ de millimètre environ ; pour le fer, $\frac{3}{1000}$ de millimètre.

Ainsi, pour les métaux magnétiques, la pénétration est plus faible que pour les métaux non magnétiques, ce qui est bien d'accord avec le résultat de la théorie (paragraphe 116).

125. Autres causes d'amortissement. — Nous avons jusqu'ici considéré seulement l'énergie perdue par rayonnement et celle qui est transformée en chaleur. M. Tesla attribue une certaine importance à la déperdition de l'électricité par les molécules gazeuses, notamment dans le cas des courants à haute fréquence, et il pense que cette cause d'amortissement a dû influer sur les résultats obtenus par M. Bjerknes.

Mais M. Tesla a opéré avec des différences de potentiel très considérables ; il est probable que les pertes par convection n'ont pas eu une grande influence dans les expériences de M. Bjerknes.

Tout au plus pourrait-il y avoir une déperdition de cette nature aux extrémités du fil, qui constituent des espèces de pointes et peut-être trouverait-on là l'explication des perturbations aux extrémités que nous avons signalées au n° 110, On pourrait tenter des expériences en plongeant les extrémités du fil dans un diélectrique autre que l'air et en voyant si ces perturbations disparaîtraient. Cela est d'ailleurs peu probable.

126. Calcul de l'énergie initiale et de l'énergie

transformée en chaleur.— Nous avons vu que les résultats expérimentaux de M. Bjerknes étaient bien dans le sens prévu par la théorie. L'accord a-t-il lieu entre les valeurs numériques des quantités observées. Nous allons chercher à calculer grossièrement ces valeurs numériques.

Soit un résonateur quelconque ; nous nous proposons de chercher l'énergie totale qu'il possède au début des oscillations, puis la chaleur de Joule dépensée pendant une oscillation complète.

Nous pourrons ensuite comparer le décrément logarithmique trouvé expérimentalement avec celui qui se déduirait des résultats du calcul.

1° *Calcul de l'énergie initiale.* — Soit i l'intensité du courant au temps t. On peut écrire (paragraphe 104 et suivants) :

$$i = \alpha . \sin \frac{\pi s}{l} \cdot \cos \frac{\pi t}{\mathrm{A}l}$$

$$e = - \alpha \mathrm{A} \cos \frac{\pi s}{l} \cdot \sin \frac{\pi t}{\mathrm{A}l} \cdot$$

Dans ces relations, s représente la longueur de l'axe du fil du résonateur, l la longueur totale de ce fil, c'est-à-dire la demi-longueur d'onde, d'après la théorie.

eds représente la charge électrique de l'élément ds du fil du résonateur.

A l'instant $t = o$, e est nul, tandis que i est différent de 0 ; par suite, l'énergie électrostatique est nulle, l'énergie électrodynamique étant différente de 0.

A l'instant $t = \frac{\mathrm{A}l}{2}$, e est au contraire différent de o et i est nul, et l'énergie électrostatique est différente de o, l'énergie électrodynamique étant nulle.

Aux époques intermédiaires, l'énergie est partie sous l'une des formes, partie sous l'autre forme, sa valeur totale étant constante puisqu'on ne tient pas compte de la perte d'énergie qui se produit pendant la première oscillation.

Pour calculer l'énergie initiale, il suffit donc de s'occuper de l'énergie électrodynamique, c'est-à-dire de :

$$\int(\mathrm{F}u + \mathrm{G}v + \mathrm{H}w).d\tau$$

ou ici :

$$\int \mathrm{A}^2 h i_0^2 ds = \mathrm{A}^2 h \int i_0^2 . ds,$$

i_0 désignant l'intensité du courant au temps $t = 0$.

2° *Calcul de la chaleur de Joule produite pendant une oscil lation.* — Cette quantité de chaleur est :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{R} i^2 . dt.$$

R s'obtient en multipliant $\frac{ds}{\lambda}$ par l'inverse de la section du fil parcourue par le courant.

Nous avons vu (paragraphe 166) que les oscillations ne pénètrent pas dans le fil au-delà d'une certaine profondeur et que leur amplitude à une profondeur z au-dessous de la surface est proportionnelle à :

$$e^{-\beta' z}.$$

Tout se passe donc comme si le courant était uniformément réparti dans l'espace compris entre deux cylindres concentriques dont la différence des rayons ε serait donnée

par :

$$\varepsilon \int i^2.dz = \left[\int idz\right]^2.$$

Or :

$$\int idz = \int_0^\infty e^{-\beta' z}.dz = \frac{1}{\beta'}$$

$$\int i^2.dz = \int_0^\infty e^{-2\beta' z}.dz = \frac{1}{2\beta'}$$

ε est donc déterminé par :

$$\frac{\varepsilon}{2\beta'} = \left(\frac{1}{\beta'}\right)^2,$$

ou :

$$\varepsilon = \frac{2}{\beta'}.$$

La section du volume parcouru par le courant est alors :

$$\frac{2}{\beta'} \cdot 2\pi\rho_0$$

et on a :

$$R = \frac{dS}{\lambda} \cdot \frac{\beta'}{4\pi\rho_0}.$$

On aura donc :

$$\int_0^T Ri^2.dt = \int_0^T \int_0^l \frac{\beta'}{4\pi\rho_0.\lambda} i^2.dt.ds.$$

D'ailleurs :

$$\int_0^T i^2.dt = \frac{i_0^2}{2} T$$

et on a pour la chaleur de Joule produite pendant une oscillation :

$$\frac{\beta'}{8\pi\rho_0\lambda} \int_0^l i_0^2.ds.$$

Ces deux expressions permettent de calculer le décrément logarithmique ; en faisant le calcul, on trouve une valeur qui s'accorde à peu près avec les résultats de l'expérience, ce qui est une vérification suffisante, étant donnée l'incertitude des calculs précédents.

En somme, nous voyons que les expériences de M. Bjerknes sont une confirmation de la théorie de Maxwell.

127. Influence des phénomènes de diffraction dans les expériences de réflexion des ondes électromagnétiques. — Nous avons vu que les expériences de réflexion des ondes électromagnétiques donnaient des résultats assez nets, alors que les dimensions du miroir plan dont on se servait n'étaient pas très considérables par rapport à la longueur d'onde.

De même, dans les expériences faites par Hertz au moyen de cylindres paraboliques, on arrivait à des résultats satisfaisants avec des excitateurs correspondant à des longueurs d'onde de l'ordre des dimensions des cylindres.

En optique, l'influence des phénomènes de diffraction se fait sentir bien plus tôt, c'est-à-dire qu'elle s'exerce même quand on opère avec des appareils de dimensions considérables par rapport aux longueurs d'onde, 100 fois plus grandes, par exemple.

On pourrait peut-être expliquer cette faiblesse de l'influence des phénomènes de diffraction dans les expériences faites sur les ondes électromagnétiques de la façon suivante : la théorie de Fresnel montre qu'en optique une onde complète équivaut à un petit élément central de l'onde, les autres éléments se détruisant deux à deux. Dans les expériences qui

nous occupent, on peut concevoir qu'il en soit de même : si les appareils dont on se sert, les miroirs, par exemple, sont assez petits pour ne former qu'une partie de cette zone centrale, les zones autres que la zone centrale, n'intervenant plus, tout se passerait sur la normale au miroir comme s'il n'y avait pas de phénomènes de diffraction, mais une partie des radiations se dissiperait dans les directions obliques.

Il n'y a d'ailleurs là qu'une indication qui demande à être approfondie.

128. Expériences de M. Klemencic. — M. Klemencic s'est servi de miroirs métalliques ayant la forme de cylindres paraboliques. Il plaçait l'excitateur suivant l'axe focal du cylindre ; dans ces conditions, si la réflexion sur le miroir se faisait conformément aux lois de l'optique géométrique, l'onde devait devenir plane et l'énergie être sensiblement la même en tous les points de l'axe de la parabole section du cylindre par un plan perpendiculaire à l'axe focal et passant par le centre de l'excitateur. Mais à cause de la diffraction une partie des radiations doit se propager dans des directions anormales pendant que sur l'axe même de la parabole l'intensité décroîtra quand la distance augmentera.

C'est ce que M. Klemencic a vérifié expérimentalement, non pas au moyen d'étincelles, mais en étudiant les effets calorifiques de la perturbation électromagnétique par un procédé thermoélectrique.

En plaçant l'un en face de l'autre deux cylindres paraboliques et un excitateur suivant l'axe focal de l'un d'eux, il a constaté que sur l'axe focal du second l'énergie se trouvait concentrée ; cependant, les effets étaient encore sensibles en des points situés en dehors de l'axe focal.

129. Expériences de M. Trouton (¹). — M. Trouton a étudié l'influence des dimensions des miroirs sur la formation des ondes stationnaires. Il se servait d'un excitateur dont la longueur d'onde était de 70 centimètres environ, placé en face d'un miroir métallique rectangulaire dont la grande dimension avait 1 mètre, l'autre dimension étant variable.

L'excitateur peut être placé dans deux positions différentes, dans l'une desquelles la force électrique est parallèle à la grande dimension du miroir, tandis que dans l'autre elle lui est perpendiculaire.

Supposons d'abord la force électrique parallèle à la petite dimension du miroir et cherchons la position du premier ventre; d'après la théorie, il doit être à une distance du miroir égale à $\frac{\lambda}{4}$. Quand la largeur du miroir est supérieure à 70 centimètres, on trouve bien en effet une distance constante et égale à $\frac{\lambda}{4}$, mais, quand cette largeur est inférieure à 30 centimètres, on trouve une distance supérieure à $\frac{\lambda}{4}$ et la différence s'accentue à mesure que la largeur diminue. En construisant une courbe dans laquelle les abscisses représentent la largeur du miroir, et les ordonnées la distance du premier ventre au miroir, on obtient la courbe figurée (*fig.* 63).

Quand la force électrique est parallèle à la dimension fixe du miroir, la distance mesurée oscille de part et d'autre de

(¹) Trouton, *Philosophical Magazine*, juillet 1891. — *Lumière électrique*, t. XL, p. 258.

$\frac{\lambda}{4}$ quand l'autre dimension est petite, et devient constante quand cette dimension dépasse la longueur d'onde de l'excitateur (*fig.* 64).

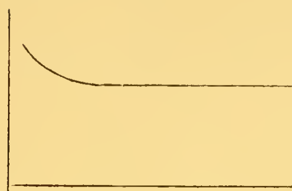


Fig. 63.



Fig. 64.

130. Sur un fait remarquable observé par MM. Sarasin et de la Rive. — Dans leurs expériences sur les ondes stationnaires faites avec un miroir de grandes dimensions, MM. Sarasin et de la Rive ont observé un fait très curieux.

Au moyen du résonateur, ils observaient des maxima et minima de l'étincelle. *Or ces minima correspondaient à une intensité de l'étincelle plus grande que celle de l'étincelle produite aux mêmes points en l'absence du miroir.*

Construisons une courbe représentant les variations de la longueur de l'étincelle en fonction de la distance au miroir, le 0 correspondant au miroir. Construisons une autre courbe représentant ces variations quand le miroir n'existe pas : c'est une courbe qui va en s'abaissant graduellement à partir du point qui correspond à l'excitateur. Le fait que nous venons de signaler est rendu manifeste par ce que tous les minima de la première courbe se trouvent situés au-dessus de la deuxième.

Ce fait ne s'explique pas bien en acceptant les idées de Hertz et de M. Bjerknes. S'explique-t-il mieux dans les idées

de MM. Sarasin et de la Rive, c'est-à-dire en admettant que la vibration émise par l'excitateur est complexe ?

Voici comment on pourrait raisonner : On a à considérer une série de vibrations qui ont des longueurs d'onde différentes, chacune d'elles donnant un système de nœuds et de ventres. En un point de l'espace se trouvera un nœud pour une des vibrations, mais un ventre, ou tout au moins une addition des effets des ondes incidente et réfléchie, pour d'autres vibrations. Les maxima et les minima observés seront ceux qui correspondent à la vibration dont la longueur d'onde est la même que celle du résonateur qu'on emploie.

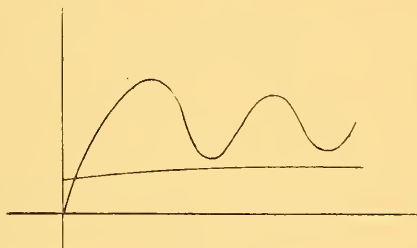


Fig. 65.

Alors, même en un minimum, les autres vibrations ajoutant leurs effets, on pourra avoir une étincelle plus intense que celle qu'on obtiendrait si l'excitateur était seul.

131. Voyons quelle est l'*interprétation théorique du phénomène* que nous venons de décrire. Supposons le résonateur dans un plan parallèle au miroir. La force électrique dans ce plan pourra être considérée comme une fonction du temps seulement, et cela aussi bien en acceptant les hypothèses de MM. Sarasin et de la Rive que celles de Hertz ou de M. Bjerknes. On aura :

$$x = \varphi(t).$$

Soit V la différence de potentiel qui existe entre les deux extrémités du résonateur placé dans ce plan ; V sera aussi une fonction de t :

$$V = F(t).$$

Cette fonction F dépendra de la fonction φ. Si par exemple on a :

$$x = \varphi(t + h),$$

on aura :

$$V = F(t + h).$$

Supposons qu'en faisant :

$$x = \varphi_1(t)$$

on ait :

$$V = F_1(t).$$

Quand on fera :

$$x = \varphi + \varphi_1,$$

on aura aussi :

$$V = F + F_1;$$

ce qui revient à dire que l'action de deux champs superposés sur le résonateur est la somme des actions de chacun des deux champs : c'est là une hypothèse bien naturelle.

Alors, le miroir n'existant pas, les deux fonctions auront pour expressions :

$$\varphi(t) \qquad \text{et} \qquad F(t)$$

Plaçons le miroir : la force électrique et la différence de potentiel dues à l'onde réfléchie seront :

$$-\varphi(t - h) \qquad \text{et} \qquad -F(t - h).$$

h représentant la différence de marche entre l'onde directe et l'onde réfléchie, et l'on aura :

$$x = \varphi(t) - \varphi(t - h)$$
$$V = F(t) - F(t - h).$$

Dans le premier cas, lorsqu'il n'y a pas de miroir, on observe le maximum de la valeur absolue de F (t), soit A.

Quand il y a le miroir, on mesure le maximum de la valeur absolue de :

$$F(t) - F(t - h).$$

Il résulterait de ce que nous avons dit que ce dernier maximum doit être supérieur à A, et cela quel que soit h. Il existe bien des fonctions F pour lesquelles cette condition serait remplie, mais ce sont des fonctions qui ne peuvent guère convenir à représenter les quantités que nous étudions.

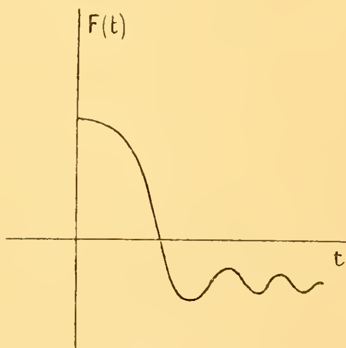


Fig. 66.

Ainsi, la fonction F (t), représentée par la courbe de la figure 66, répondrait à la question; mais il faudrait supposer que la différence de potentiel reste constamment négative à partir d'un temps très court, ce qui n'est guère admissible.

Remarque. — Nous avons vu que les maxima et les minima de la valeur absolue de :

$$F(t) - F(t - h$$

sont atteints quand on a :

$$F'(t) = F'(t - h) = 0.$$

Considérons un de ces maxima : il ne pourra pas être supérieur à 2A, A représentant la valeur maxima de $| F(t) |$; en effet, le maximum de $F(t)$ étant A, la différence :

$$F(t) - F(t - h),$$

se compose de deux termes inférieurs chacun à A, en valeur absolue ; le maximum de sa valeur absolue est donc inférieur à 2A.

Je crois que, si on cherchait à faire cette vérification sur les courbes de MM. Sarasin et de la Rive, on trouverait que la condition n'est pas remplie.

En tous cas, le point le mieux établi est que les maxima et les minima observés sont équidistants, l'intervalle entre deux consécutifs étant égal à $\frac{\lambda}{4}$. Les zéros de la dérivée $F'(t)$ doivent donc être équidistants. Si cela n'avait pas lieu, toute notion de longueur d'onde se trouverait détruite.

Les expériences de MM. Sarasin et de la Rive, décrites au chapitre précédent, ne laissent aucun doute à cet égard.

D'autres expériences de M. Klémencic, quoique fondées sur un principe entièrement différent, conduisent à ce même résultat.

132. *M. Klemencic* se sert de deux miroirs paraboliques dont les axes viennent se couper en un point R ; en ce point, plaçons un miroir plan ; les vibrations émises par un excitateur placé suivant la ligne focale d'un des miroirs paraboliques sont transformées en une onde plane, qui, après ré-

flexion sur le miroir plan placé en R, se concentre sur l'axe du deuxième miroir parabolique et y produit des effets calorifiques.

Au lieu de placer un seul miroir en R, M. Klemencic en place deux séparés par une certaine distance, de sorte que les ondes réfléchies ont entre elles une différence de marche ; il observe les effets variables résultant de la superposition des deux ondes sur l'axe du second miroir parabolique et construit des courbes représentant ces effets ; elles ont une allure régulière avec des maxima et des minima équidistants.

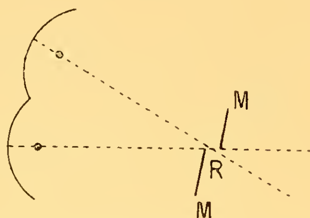


Fig. 67.

Et cependant la quantité mesurée n'est pas la même. Ce n'est plus le maximum de $F(t) - F(t-h)$ que l'on mesure, mais l'intégrale :

$$\int [F(t) - F(t-h)]^2 dt.$$

Il est donc difficile de se soustraire à cette conséquence, que la courbe :

$$y = F(t)$$

doit présenter une allure régulière avec des maxima et des minima équidistants, et par conséquent que les zéros de $F'(t)$ doivent être équidistants.

133. Ceci étant admis, considérons les valeurs de h, qui correspondent aux maxima et minima de la courbe construite par MM. Sarasin et de la Rive. Pour ces valeurs, les dérivées $F'(t)$ et $F'(t-h)$ sont nulles, c'est-à-dire que les valeurs

de F (t) et F $(t-h)$ sont toutes deux des maxima ou des minima.

Soit par exemple h la différence de temps correspondant au premier minimum, pour que la valeur absolue de :

$$F(t) - F(t-h)$$

soit supérieure au maximum A de F (t), il faut que les valeurs de F (t) et F $(t-h)$ soient de signes contraires, *c'est-à-dire que les maxima et les minima de* F (t) *ne peuvent être alternativement positifs et négatifs*. Cette condition implique pour la fonction F (t) une complication qui ne serait pas d'accord avec la régularité de toutes les courbes obtenues expérimentalement.

Si on veut tenir compte des pertes par réflexion, on obtiendra des résultats exigeant également que la fonction F (t) soit très complexe, à moins de supposer que dans l'expression :

$$V = F(t) - \beta F(t-h)$$

donnant la différence de potentiel en un point, le coefficient β soit supérieur à l'unité, ce qui est inadmissible.

L'explication de MM. Sarasin et de la Rive ne rend donc pas suffisamment compte du fait singulier qui nous occupe.

Peut-être est-il dû à la diffraction et y a-t-il sur la normale au centre du miroir une espèce de ligne focale, où se concentrent les rayons diffractés.

En somme, l'étude expérimentale des faits dont nous venons de parler demande à être reprise.

CHAPITRE VII

PROPAGATION DES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES DANS LES DIÉLECTRIQUES AUTRES QUE L'AIR

134. Relation de Maxwell $\varepsilon = n^2$. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé en présence des corps conducteurs et un seul diélectrique, l'air, que nous avons assimilé au vide. Les propriétés des autres diélectriques présentent un très grand intérêt, mais sont encore plus difficiles à étudier expérimentalement que celles que nous avons étudiées jusqu'ici.

Maxwel a indiqué, comme conséquence de sa théorie, l'égalité de la constante diélectrique ε et du carré de l'indice de réfraction n^2. Cette égalité a été vérifiée expérimentalement pour quelques corps, le soufre, par exemple, et les gaz : il est vrai que, dans ce dernier cas, les deux quantités étant très voisines de l'unité ont forcément des valeurs très rapprochées. Pour beaucoup de corps, on a, au contraire, trouvé un désaccord complet entre les valeurs de ε et de n^2, et les

valeurs de ε sont ordinairement plus grandes que celles de n^2.

Il n'est d'ailleurs pas étonnant qu'il y ait désaccord entre ε et n^2 ; la théorie ne prévoit leur égalité que quand ces quantités correspondent à des vibrations de même période. Comme les périodes des oscillations électriques les plus rapides qu'on ait pu produire sont encore très grandes par rapport aux périodes des vibrations lumineuses, dans la formule de dispersion :

$$n = \varphi(\lambda)$$

qui donne l'indice optique en fonction de la longueur d'onde, on fait $\lambda = \infty$, et c'est la valeur de n ainsi obtenue qu'on compare à $\sqrt{\varepsilon}$. Mais ces extrapolations ne présentent aucune certitude, car on ne connaît qu'une bien faible partie de la courbe qui représente les variations de n en fonction de λ.

ε peut être mesuré de différentes façons : soit par des procédés électrostatiques, soit au moyen d'oscillations aussi rapides que possible ; on cherche à éviter, en employant des oscillations rapides, l'influence mal connue des charges résiduelles et on peut espérer que les valeurs de ε ainsi trouvées différeront de celles obtenues par des procédés électrostatiques et se rapprocheront davantage du carré de l'indice optique.

Nous allons d'abord exposer les différentes méthodes qui ont servi pour déterminer ε et nous donnerons ensuite les résultats.

I. — Méthodes basées sur l'emploi des oscillations Hertziennes

135. Méthode utilisant la valeur de la vitesse de propagation. — Une première méthode se présente d'elle-même, étant basée sur les principes de la théorie.

Rappelons les équations de Hertz appliquées à un point compris dans l'air :

$$(1) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz}; \\ A\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy}. \end{cases}$$

Elles signifient qu'une perturbation électromagnétique quelconque se propage dans l'air avec une vitesse égale à $\frac{1}{A}$.

Pour un diélectrique non magnétique, on aura :

$$(2) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz}; \\ A\varepsilon\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy}. \end{cases}$$

Or, changeons dans les équations (1) :

$$A \qquad \text{en} \qquad A\sqrt{\varepsilon}$$

et :

$$X, Y, Z \qquad \text{en} \qquad X\sqrt{\varepsilon},\ Y\sqrt{\varepsilon},\ Z\sqrt{\varepsilon}.$$

Elles deviennent :

$$A\sqrt{\varepsilon}\frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy}\sqrt{\varepsilon} - \frac{dY}{dz}\sqrt{\varepsilon}$$

et :

$$A\sqrt{\varepsilon}.\sqrt{\varepsilon}.\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy};$$

c'est-à-dire justement le groupe des équations (2). Il résulte de là que la vitesse de propagation dans le diélectrique considéré est $\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon}}$ et qu'il suffira de connaître cette vitesse de propagation pour connaître ε.

Mais comment mesurer cette vitesse de propagation ? Il nous est impossible d'employer les méthodes d'interférence par réflexions employées pour l'air. Or, *la théorie exige que la vitesse de propagation soit la même dans l'air et dans un fil plongé dans l'air, ou bien dans un diélectrique quelconque, et dans un fil plongé dans ce diélectrique.* Ce résultat ayant été vérifié dans le cas de l'air, nous pouvons l'admettre pour un autre diélectrique et nous contenter de mesurer la vitesse de propagation dans un fil conducteur plongé dans ce diélectrique.

On peut employer un procédé identique à celui de M. Blondlot pour mesurer la longueur d'onde dans la propagation dans un fil : on fait passer une perturbation électromagnétique dans un fil, soit par le procédé de Hertz, soit par celui de M. Blondlot (paragraphe 56) ; puis on réunit deux fils par un pont mobile, comme cela a été indiqué à propos des expériences de M. Blondlot ; tout le système est plongé dans le diélectrique qu'on veut étudier, et le résona-

teur est placé près de la cuve contenant le diélectrique, en dehors de cette cuve.

On déplace le pont mobile de manière à obtenir successivement des nœuds et des ventres. Supposons qu'un déplacement correspondant à une variation de longueur l' du fil fasse succéder un ventre à un nœud, alors qu'un déplacement correspondant à une longueur l produirait dans l'air le même effet ; en désignant par V et V′ les vitesses de propagation dans l'air et dans le diélectrique, on aura :

$$\frac{V}{V'} = \frac{l}{l'}.$$

136. Expériences de MM. Rubens et Arons (1). — MM. Rubens et Arons ont opéré autrement. Rappelons que, dans ses premières expériences, Hertz s'est servi d'un cadre rectangulaire portant au milieu d'un de ses côtés un micromètre à étincelles ; mettons une des boules de l'excitateur en communication avec le milieu du côté opposé (*fig.* 68) ; le

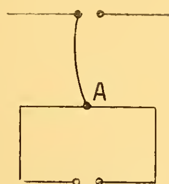


Fig. 68.

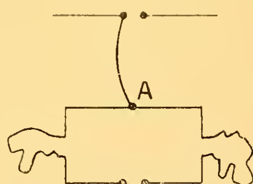


Fig. 69.

chemin à parcourir par l'étincelle étant le même de chaque côté, la différence de potentiel entre les deux boules du micromètre sera nulle et nous n'obtiendrons pas d'étincelles ; mais, si nous déplaçons le point d'attache du fil de communi-

(1) Rubens et Arons, *Wied. Annalen*, t. xl, p. 585. — *Lumière électrique.*

cation, nous obtiendrons des étincelles. MM. Rubens et Arons se servent de deux cadres analogues (paraissant superposés sur la figure 69); le point A d'un des cadres est mis en communication avec une des boules de l'excitateur, et le point correspondant A′ du second avec l'autre boule.

Au lieu d'observer les étincelles, ces expérimentateurs se sont servis du bolomètre.

On cherchait d'abord le point neutre A, puis, sur chaque partie du trajet, on intercalait un fil : l'un de ces fils restait dans l'air et l'autre était plongé dans le diélectrique à étudier. Si les longueurs des deux fils étaient proportionnelles aux vitesses de propagation respectivement dans l'air et dans le diélectrique, les temps mis par la perturbation pour parcourir les deux trajets étaient restés égaux et on ne devait pas encore avoir d'étincelles. Ce résultat était obtenu en faisant varier la longueur d'un des deux fils jusqu'à disparition des étincelles.

En désignant par l et l' les longueurs des deux fils, on avait alors :

$$\frac{V}{V'} = \frac{l}{l'}.$$

137. Méthode utilisant la valeur de la capacité d'un résonateur ou d'un excitateur. — La période d'un résonateur ou d'un excitateur est donnée par la formule :

$$2\pi\sqrt{LC}.$$

Or, la capacité d'un condensateur plongé dans l'air étant C, cette capacité devient εC quand la lame isolante est constituée

par un diélectrique. La période devient donc :

$$2\pi\sqrt{\varepsilon}\sqrt{LC}.$$

De là, la possibilité de mesurer ε. Cette méthode ne peut guère, avec le résonateur de M. Blondlot, s'appliquer aux diélectriques solides, car l'épaisseur de la lame isolante du condensateur est très faible : on l'emploie pour les liquides en y plongeant le résonateur entier.

Expériences de M. J.-J. Thomson (1). — M. Thomson a opéré avec un excitateur dont il faisait varier la capacité en remplaçant par un diélectrique l'air qui formait d'abord la lame isolante du condensateur compris dans son appareil. Il mesurait dans chaque cas la longueur d'onde au moyen d'un même résonateur ; cette méthode est peu sûre d'après ce que nous avons dit sur le phénomène de la résonance multiple.

La capacité, dans l'appareil de M. Thomson, ne se composait pas seulement de celle du condensateur qui y était intercalé : la capacité totale, trouvée par la méthode de Maxwell que nous verrons plus loin, était de 40 centimètres ; celle du condensateur, calculée au moyen de la formule

$$\frac{S}{4\pi e}$$

était de 28 centimètres. La capacité due aux autres conducteurs était donc de 12 centimètres.

Introduisons une lame diélectrique dans le condensateur ;

(1) J.-J. Thomson, *Philosophical Magazine*, 5e série, t. XXX, p. 129.

la capacité totale deviendra :

$$28.\varepsilon + 12$$

et l'on aura :

$$\frac{C'}{C} = \frac{28.\varepsilon + 12}{40} = \frac{\lambda'^2}{\lambda^2},$$

λ' et λ désignant les longueurs d'onde dans le diélectrique et dans l'air.

Remarque. — Lorsqu'on étudie la propagation des ondes électromagnétiques dans un fil au moyen d'un résonateur, si le résonateur est plongé dans le diélectrique, liquide, par exemple, sa capacité est multipliée par ε et par suite la longueur d'onde est multipliée par $\sqrt{\varepsilon}$.

D'autre part, si le fil est plongé dans le liquide sans que le résonateur y soit, la vitesse de propagation est multipliée par $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, et, comme la période n'a pas varié, la longueur d'onde est multipliée par $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Si donc on plonge à la fois le résonateur et le fil dans le liquide, la longueur d'onde doit se trouver en même temps multipliée par $\sqrt{\varepsilon}$ et par $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, c'est-à-dire qu'elle ne doit pas changer.

Ce résultat est exigé par la théorie, mais il ne faudrait pas croire qu'il suffit à la vérifier complètement, car on peut le déduire de simples considérations d'homogénéité.

Soit une série de résonateurs semblables et l une dimension de l'un d'eux ; la longueur d'onde λ doit être une fonction de l et l'homogénéité exige que l'on ait :

$$\lambda = \alpha.l,$$

c'est-à-dire que λ soit proportionnel à l, ce que l'expérience vérifie d'ailleurs. Mais on pourrait imaginer une formule homogène ne satisfaisant pas à la condition de proportionnalité, par exemple :

$$\lambda = \alpha l + \beta \frac{l^2}{l_0},$$

l_0 étant une longueur caractéristique de l'air ; ceci montre qu'il ne faut pas accorder une confiance illimitée à des raisonnements de ce genre.

Supposons maintenant qu'on opère dans un diélectrique de constante diélectrique K, les unités adoptées étant les unités électromagnétiques. La longueur d'onde pourra dépendre des constantes spécifiques de ce diélectrique, surtout de K, et on aura :

$$\lambda = l.f(K).$$

D'après l'homogénéité, $f(K)$ doit être un nombre ; or K est l'inverse du carré d'une vitesse ; il faut donc que $f(K)$ soit une constante, à moins qu'on introduise une nouvelle constante spécifique K_0 jouant le rôle de l_0 dans le cas précédent.

Quoi qu'il en soit de ces raisonnements, M. Blondlot a vérifié qu'en plongeant le fil et le résonateur dans de l'essence de térébenthine ou dans de l'huile de lin la disposition des nœuds et des ventres n'était pas modifiée. Cette expérience est intéressante, mais ne permet pas de trouver ε : il faudra pour trouver ε ne plonger dans le diélectrique que le fil seul ou le résonateur seul.

Il est plus satisfaisant, dans la recherche de ε, de n'employer aucune formule : c'est ce qu'ont fait M. Lecher et M. Blondlot.

138. Expériences de M. Lecher. — M. Lecher emploie la disposition qui est indiquée dans la figure 70. Sur les deux fils il dispose un pont mobile et un tube de verre vide sans électrodes. Pour certaines positions du pont le tube de verre s'illumine lorsqu'on produit les oscillations : pour d'autres, il ne s'illumine pas. Nous n'avons pas à nous inquiéter ici de la façon dont M. Lecher explique la disposition des maxima et minima d'intensité lumineuse : cette explication n'a pas à intervenir dans les expériences actuelles.

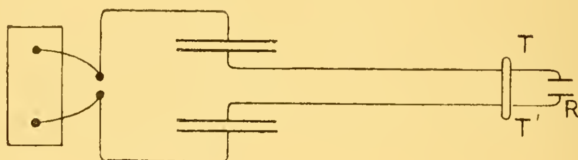


Fig. 70.

Les deux fils sont terminés par deux petits plateaux situés l'un en face de l'autre et formant les armatures d'un condensateur R ; la position du pont correspondant à un maximum d'illumination du tube change quand on fait varier la distance des deux plaques, ou encore quand on introduit entre elles différents diélectriques.

Introduisons d'abord une lame isolante telle que la distance des deux armatures soit d, et cherchons la position du pont qui correspond à un maximum d'illumination ; enlevons la lame : la position qui correspond à un maximum n'est plus la même ; faisons varier la distance des deux armatures jusqu'à ce que cette position redevienne la même. On peut admettre que la capacité du condensateur R est redevenue la même, puisque les mêmes effets sont obtenus. Alors

une épaisseur d du diélectrique équivaut à une épaisseur d d'air et on a :

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{1}{d'},$$

d'où l'on tire ε.

139. Expériences de M. Blondlot. — M. Blondlot emploie une sorte de condensateur dont les deux plateaux communiquent par un fil sur lequel est interposé un micromètre à étincelles ; ce condensateur fonctionne comme un excitateur quand on fait communiquer ses deux armatures avec les pôles d'une bobine d'induction.

En face de AB et de BC sont placées deux plaques A'B et B″C″, symétriques par rapport à un plan passant par le point B. Deux fils partent de ces plateaux et aboutissent à des charbons à lumière ; si l'appareil présente une symétrie complète, aucun phénomène lumineux ne se produit. Intercalons une lame isolante, de constante diélectrique ε, entre AB et A'B' : la symétrie étant détruite, des étincelles jaillissent entre les charbons. Entre BC et B″C″ plaçons une lame de soufre d'épaisseur telle que les étincelles cessent : les capacités des deux condensateurs AB.A'B' et BC.B″C″ sont alors redevenues les mêmes, et l'on aura :

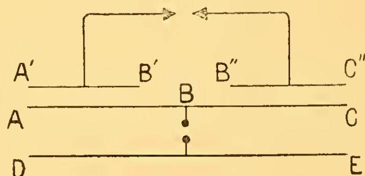


Fig. 71.

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{1}{\frac{d'}{\varepsilon_0} + \frac{d''}{1}} = \frac{\varepsilon_0}{d' + d''.\varepsilon_0},$$

Or le soufre est un des rares corps pour lesquels la relation de Maxwell est bien vérifiée par les valeurs de ε_0 obtenues par des méthodes statiques, et il en est probablement de même quand on opère avec les oscillations hertziennes. ε_0 est donc connu et on peut déduire ε de la relation précédente.

On aurait pu faire cesser les étincelles en faisant varier la distance de BC et B″C″, sans introduire de lame de soufre; mais on pourrait se demander si ceci ne change pas la symétrie de l'appareil autrement qu'en changeant la capacité du condensateur.

140. Méthode du prisme.— La quantité $\sqrt{\varepsilon}$ joue par rapport aux oscillations hertziennes le même rôle que l'indice n par rapport aux oscillations lumineuses, qui sont bien plus rapides; on pourrait appeler $\sqrt{\varepsilon}$ l'indice de réfraction électrique.

Jusqu'à présent, nous nous sommes servis pour le mesurer de méthodes rappelant celle du réfractomètre interférentiel en optique.

Mais on peut aussi employer une méthode analogue à celle du prisme en optique : les rayons sont rendus parallèles au moyen d'un cylindre parabolique et sont reçus à leur sortie du prisme par un autre cylindre.

Les résultats sont beaucoup moins nets que ceux obtenus en optique, parce que le prisme n'a pas une grandeur infinie par rapport aux longueurs d'onde et que de plus le parallélisme des rayons incidents est très imparfait.

II. — Méthodes statiques

On peut mesurer la constante diélectrique ε par un grand nombre de méthodes statiques, dont nous allons rapidement passer en revue les principales, pour pouvoir ensuite comparer les résultats obtenus avec ceux des méthodes précédentes.

141. Méthode de Maxwell. — Maxwell emploie un condensateur dont les deux armatures peuvent être mises en communication avec les pôles d'une pile et aussi en communication entre elles ; un contact mobile produit, par exemple, par une languette flexible permet d'établir alternativement les deux communications et, par suite, de charger et de décharger le condensateur un certain nombre de fois par seconde, n fois par exemple.

Soit V la différence de potentiel entre les deux pôles de la pile, C la capacité du condensateur; à chaque décharge il passe une quantité d'électricité égale à CV, c'est-à-dire par seconde une quantité :

$$nVC.$$

Si, au lieu du condensateur, on place entre les deux pôles de la pile un conducteur de résistance R, il passera dans ce conducteur par seconde une quantité d'électricité :

$$\frac{V}{R}.$$

Le système où figure le condensateur se comporte donc

comme un conducteur de résistance :

$$\frac{1}{nC}$$

et on n'a plus qu'à employer une méthode quelconque de comparaison de résistances pour connaître la capacité du condensateur et par suite la constante diélectrique de la substance qui forme la lame isolante.

142. Méthode de Gordon. — C'est une des méthodes qui ont été le plus employées.

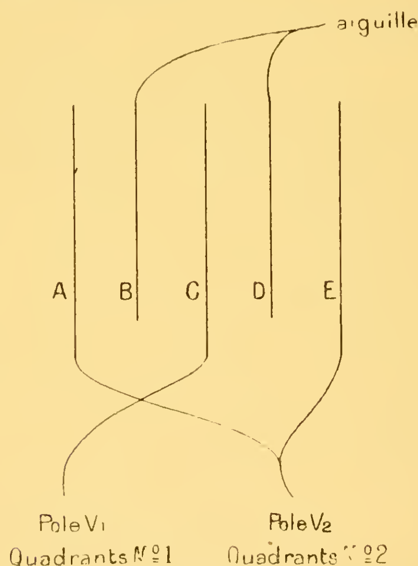


Fig. 72.

Imaginons cinq plaques métalliques ABCDE (*fig.* 72). La plaque centrale C est mise en communication avec un des pôles d'une pile, au potentiel V_1, qui communique d'autre part avec une des paires de quadrants d'un électromètre.

Les plaques extrêmes A et E communiquent avec le pôle opposé de la pile, au potentiel V_2 et en même temps avec la deuxième paire de quadrants.

Enfin, B et D communiquent avec l'aiguille et sont à un potentiel V. La déviation de l'aiguille est proportionnelle à :

$$(V_1 - V_2)\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right).$$

Si B et D sont situées exactement au milieu des intervalles des autres plaques, on a par symétrie :

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

et la déviation est nulle.

Introduisons une lame isolante entre D et E par exemple : une déviation se produira ; on peut alors éloigner le plateau E au moyen d'une vis micrométrique jusqu'à ce que l'aiguille revienne au 0 : c'est que la capacité du condensateur formé par DE est redevenue ce qu'elle était, ce qui permet de calculer la constante diélectrique de la lame.

On peut placer une deuxième lame entre A et B et comparer de la même façon sa constante diélectrique à celle de la première lame.

Cette méthode peut être modifiée de différentes façons :

1° On peut faire varier la durée de la charge et étudier l'influence de cette durée sur la valeur de la constante diélectrique ;

2° On peut comparer les capacités de deux condensateurs en faisant communiquer deux armatures avec un pôle d'une pile dont l'autre pôle est au sol, et chacune des autres arma-

tures avec une des paires de quadrants d'un électromètre dont l'aiguille est au sol (*fig.* 73). Lorsque les capacités sont égales, il n'y a pas de déviation, et ces capacités peuvent être changées par l'introduction de lames isolantes entre les armatures ou en faisant varier la distance de ces armatures.

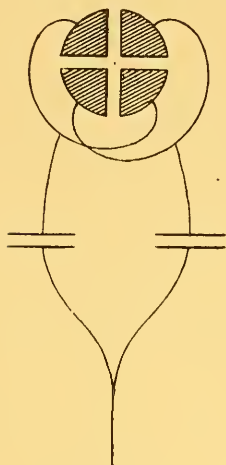


Fig. 73.

M. Lecher a employé cette méthode pour en comparer les résultats avec ceux qu'il avait déduits des expériences que nous avons décrites plus haut.

143. Méthode de l'attraction (1). — Deux petites sphères sont mises en communication avec les extrémités d'une pile dont l'élément central est au sol. Leurs potentiels sont $+V$ et $-V$. Soit r la valeur commune des rayons des deux sphères. Les charges des deux sphères supposées placées dans l'air sont :

$$+Vr \qquad \text{et} \qquad -Vr,$$

et l'attraction qui s'exerce entre elles est mesurée par :

$$\frac{V^2r^2}{\rho^2},$$

ρ désignant la distance des centres.

Si on les plonge dans un diélectrique de constante diélec-

(1) Gouy, *C. R.*, t. CVI, p. 540 (1888).

trique ε, l'attraction devient :

$$\varepsilon . \frac{V^2 r^2}{\rho^2},$$

expression qui permet de calculer ε.

144. Méthode de l'électromètre différentiel. — Soient deux électromètres à quadrants plongés l'un dans l'air, l'autre dans le diélectrique à étudier ; on peut les mettre en communication avec les pôles d'une pile de façon à ce qu'ils soient en opposition : par exemple, s'ils commandent la déviation d'une même aiguille, l'un tendra à la faire dévier à droite, l'autre à gauche ; on s'arrangera de façon à réaliser l'équilibre et à pouvoir déduire de là la constante diélectrique.

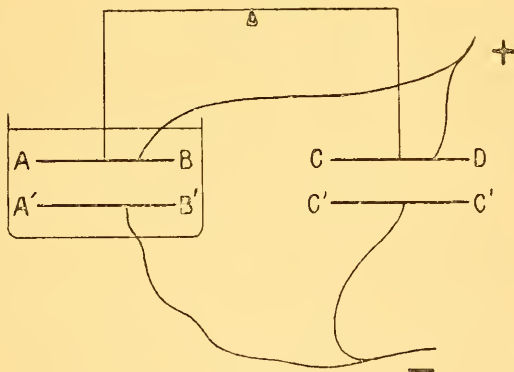


Fig. 74.

Les dispositions ont été variées de plusieurs manières :

1° Thomson se sert de deux condensateurs dont les armatures supérieures sont suspendues aux extrémités du fléau d'une balance. L'un d'eux, AB,A′B′, est plongé dans un diélectrique liquide (*fig.* 74), l'autre dans l'air. Les armatures

inférieures sont mises en communication avec un des pôles d'une pile, et les armatures supérieures avec l'autre pôle. Si les capacités des deux condensateurs sont égales, l'équilibre est établi.

On peut le réaliser en faisant varier la distance des armatures d'un des condensateurs et déduire de cette distance la constante diélectrique de l'isolant.

2° On a aussi employé un électromètre à quadrants dont les deux plateaux sont situés à une certaine distance l'un de l'autre (*fig.* 75). Il y a deux aiguilles, chacune d'elles étant près d'un des plateaux ; les deux aiguilles sont soudées à un même axe vertical. Le système inférieur est plongé dans un diélectrique liquide et l'autre est dans l'air ; on établit les communications avec les deux pôles d'une pile de façon que les deux aiguilles tendent à faire tourner l'axe en deux directions opposées : on peut faire varier la distance de chaque aiguille aux quadrants correspondants.

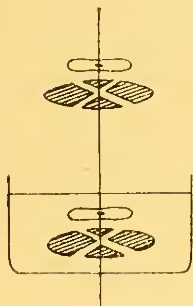


Fig. 75.

M. Pérot a utilisé cette méthode pour étudier les variations de la valeur de ε avec la durée de la charge. Si ε était constant, l'équilibre une fois établi devrait subsister quand on fait varier la durée de la charge : or on observait, au contraire, une déviation de l'aiguille.

145. Méthode du galvanomètre balistique. — On charge un condensateur avec une différence de potentiel connue. On le décharge par l'intermédiaire d'un galvano-

mètre balistique dont la déviation mesure la quantité d'électricité constituant la charge du condensateur. Connaissant la différence de potentiel des deux armatures et leur charge, on a immédiatement la capacité.

146. Méthode des surfaces équipotentielles, de M. Pérot. — M. Pérot a mesuré un certain nombre de constantes diélectriques par une méthode particulière qui paraît donner des résultats différents de ceux obtenus par les autres méthodes : elle est basée sur la proposition suivante :

On démontre en électrostatique que les lignes de force dans deux diélectriques contigus ne sont pas dans le prolongement les unes des autres : elles éprouvent une sorte de réfraction.

Ainsi, dans le cas où l'un des diélectriques est l'air, i désignant l'angle des lignes de force dans l'air avec la normale à la surface de séparation, et r l'angle correspondant dans l'autre diélectrique, on a :

$$\operatorname{tg} i = \varepsilon \,.\, \operatorname{tg} r.$$

En étudiant la réfraction des lignes de force on peut donc mesurer ε. C'est ce qu'a fait M. Pérot.

Soit un prisme de grandes dimensions formé de la substance à étudier et un système de lignes de force, parallèles entre elles, aboutissant normalement à la face AB. Puisque $i = 0$, il en est de même de r, et la seule réfraction se produit sur la deuxième face AC.

Comment déterminer la direction des lignes de force ? On utilise pour cela la propriété des surfaces équipotentielles d'être normales aux lignes de force. Soit une plaque conduc-

trice AB mise en communication avec le sol et une autre plaque isolée CD, parallèle à la première. Supposons qu'on déplace CD parallèlement à AB ; pendant ce déplacement, il peut se produire deux choses : ou bien le potentiel de CD varie, et alors la charge du condensateur AB.CD varie aussi ; ou bien le potentiel de CD reste fixe, et alors la charge reste

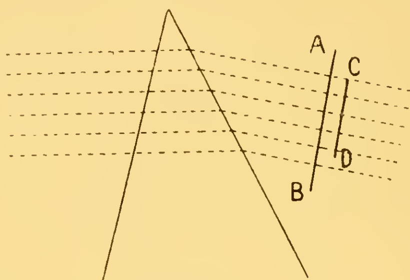


Fig. 76.

également fixe (ce qu'il est facile de vérifier expérimentalement).

Or la condition pour que le déplacement de CD dans son plan ne fasse pas varier son potentiel est que ce déplacement ait lieu suivant une surface équipotentielle. Ce procédé permet donc de savoir quand les plaques AB et CD sont dans la direction des surfaces équipotentielles, et par suite de déterminer la direction des lignes de force et d'étudier la réfraction.

147. Résultats. — Les résultats ne sont guère d'accord. Il existe d'abord une cause de divergence connue depuis longtemps: c'est la pénétration des charges à travers les diélectriques, dont l'effet est de donner pour ε des valeurs trop grandes ; aussi a-t-on cherché à opérer au moyen des

oscillations hertziennes; on pouvait espérer trouver des nombres plus faibles, se rapprochant plus du carré de l'indice optique, puisque la rapidité de la charge s'opposait à la pénétration.

Les premières expériences dans ce sens sont celles de *M. J.-J. Thomson.*

Il a trouvé pour le verre, au lieu de 3 à 4, valeur donnée par les méthodes statiques, le nombre 2,70, qui est bien intermédiaire entre le nombre précédent et le carré de l'indice optique.

Puis *M. Lecher* fit des expériences avec des périodes de trois valeurs différentes :

3.10^{-8} secondes (oscillations hertziennes);
3.10^{-4} (oscillations d'une bobine de Ruhmkorff);
5.10^{-1} (par la méthode de Gordon).

Voici ses résultats pour les valeurs de ε :

Valeur de la période	$3\ 10^{-8}$	3.10^{-4}	5.10^{-1}
Verre	7,31	5,34	4,67
Pétrole.	2,42	2,35	2,30

On voit que pour le verre les résultats de M. Lecher sont tout différents de ceux de M. Thomson, puisque la valeur trouvée avec les oscillations les plus rapides est la plus grande.

M. Blondlot a trouvé en opérant avec les oscillations hertziennes 2,8, nombre à peu près identique à celui qu'avait trouvé M. Thomson.

MM. Rubens et Arons donnent les indices optiques et les valeurs de ε trouvées par une méthode statique et, d'autre part, au moyen des oscillations hertziennes, pour l'huile de ricin, l'huile d'olive et le pétrole.

	Carré de l'indice optique	ε (oscillations)	ε (méthode statique)
Huile de ricin . . .	1,48	2,05	2,16
Huile d'olive. . . .	1,47	1,71	1,75
Pétrole.	1,45	1,60	1,64

Les valeurs de ε se trouvant dans la colonne du milieu sont bien comprises entre les valeurs des deux autres colonnes.

M. Pérot trouve que ε varie plus vite avec la période que ne l'indiquent les résultats de MM. Rubens et Arons. Ainsi voici les résultats obtenus avec un échantillon de verre :

Période. . . .	72.10^{-10}	334.10^{-10}	880.10^{-10}
Valeur de ε. .	2,71	4,82	6,33

M. Pérot pense que les résultats de MM. Arons et Rubens ont été entachés d'erreur à cause de faibles traces d'eau contenues dans les liquides dont ils se servaient ; l'hygroscopicité du verre a une influence considérable.

Avec la méthode des surfaces équipotentielles, M. Pérot a trouvé pour le verre :

$$\varepsilon = 2,39.$$

Ce résultat est très intéressant : il prouve que cette méthode essentiellement statique donne des résultats diffé-

rents de ceux donnés par les autres méthodes statiques et concordant avec le carré de l'indice optique.

M. Pérot en conclut que les diélectriques compris entre les armatures d'un condensateur sont le siège de phénomènes particuliers : une sorte d'électrolyse se produirait, dont les effets augmenteraient avec la durée de la charge, d'où les variations constatées pour ε. Mais ceci n'aurait aucune influence sur la direction des lignes de force, de sorte que la constante diélectrique que l'on mesure par la méthode des surfaces équipotentielles serait la vraie constante diélectrique ayant la valeur que lui assigne la loi de Maxwell.

Les expériences de MM. Arons et Rubens conduiraient au contraire à penser que la constante diélectrique déterminée pour des oscillations plus ou moins rapides varie peu et à construire une sorte de courbe de dispersion peu inclinée.

Pour la *résine*, on a trouvé les nombres suivants :

Carré de l'indice optique.	2
Par les surfaces équipotentielles	2,1
Avec les oscillations hertziennes. . . .	2,12
Par le galvanomètre balistique.	2,03
Par une autre méthode statique.	2,88
Par la méthode d'attraction.	3,44

Pour l'alcool, l'eau et la glace, nous allons rencontrer des divergences encore plus considérables.

Alcool. — 1° Les méthodes statiques ont donné pour $\sqrt{\varepsilon}$ des nombres voisins de 4,9, c'est-à-dire bien différents de l'indice optique.

2° Cependant *M. Stchegtiœf*, employant la méthode de Gordon avec les oscillations produites par une bobine de

Ruhmkorff, a trouvé pour $\sqrt{\varepsilon}$ un nombre voisin de l'indice optique.

3° Les méthodes fondées sur l'emploi des oscillations hertziennes, ont donné une valeur voisine de 4,9.

Eau. — 1° *M. Gouy*, par la méthode de l'attraction, a trouvé :

$$\varepsilon = 80.$$

La valeur de ε varie, bien entendu, avec les impuretés contenues dans l'eau et la rendant plus ou moins conductrice ; 80 est la valeur vers laquelle tend ε quand la conductibilité de l'eau tend vers 0.

M. Lecher a trouvé la constante diélectrique trop élevée pour pouvoir être mesurée par sa méthode.

M. Cohn a mesuré ε en cherchant la longueur d'onde dans un fil plongé dans l'eau. Il a trouvé que ε dépend de la conductibilité de l'eau et de la température.

Voici quelques-uns de ses résultats, la conductibilité λ étant exprimée avec les unités employées par Hertz :

Pour une eau dont la conductibilité est $\lambda = 7.10^{-10}$.	$\varepsilon = 73{,}5$
Pour $\lambda = 455.10^{-10}$	$\varepsilon = 78{,}5$
A la température de 9°.	$\varepsilon = 76$
Avec la même eau à 35°	$\varepsilon = 67$

En somme, ces nombres sont voisins de celui indiqué par M. Gouy.

Un seul expérimentateur a trouvé pour ε un nombre voisin du carré de l'indice optique, $\varepsilon = 1{,}75$.

Glace. — Une méthode statique a donné :

$$\varepsilon = 78,$$

nombre voisin de celui trouvé par M. Gouy pour l'eau.

M. Blondlot, en employant les oscillations hertziennes, a trouvé au contraire :

$$\varepsilon = 2{,}5$$

et *M. Pérot*, par la même méthode, a obtenu un nombre voisin du précédent.

On voit qu'il y a ici une différence énorme entre le nombre de MM. Blondlot et Pérot, d'une part, et le nombre 78, d'autre part.

148. Réfraction des ondes électromagnétiques à travers les diélectriques (1). — Les diélectriques ont sur les ondes électromagnétiques d'autres effets que la variation de vitesse, effets qui sont les conséquences de cette variation.

Ainsi nous avons déjà parlé de leur réfraction à travers un prisme.

On a varié l'expérience en remplaçant le prisme par une lentille et en constatant une concentration des ondes dans le voisinage du foyer. Cela d'ailleurs ne nous apprend rien de plus. Étudions maintenant un autre effet des diélectriques, la réflexion à leur surface.

149. Réflexion à la surface de séparation de l'air et d'un diélectrique. — *M. Trouton* (2) a d'abord étudié la réflexion sur une lame de verre et n'a pas trouvé trace de vibrations réfléchies, ce qu'on peut expliquer de la façon suivante. La réflexion des ondes lumineuses sur une lame mince donne lieu au phénomène des anneaux colorés. Si la

(1) Lodge et Howard, *Philosophical Magazine*, t. XXVIII, p. 48. — *Lumière électrique*.

(2) Trouton, *Nature*, t. XXXIX, p. 391, et t. XL, p. 228. — *Lumière électrique*, t. XXVI, p. 629 et XLI, p. 223.

lame est très mince par rapport à la longueur d'onde, sur toute sa surface s'étendra le centre noir des anneaux.

C'est ce qui se produit ici : la lame de verre employée étant d'une épaisseur très faible par rapport à la longueur d'onde, les rayons réfléchis sur les deux faces interfèrent d'une façon complète et on peut dire qu'il n'y a pas réflexion.

MM. Rubens et Arons ont constaté que des lames de verre minces placées entre un résonateur et un excitateur ne modifiaient pas l'action de ce dernier; en effet, les vibrations n'étant pas réfléchies, d'après ce que nous venons de voir, sont transmises sans affaiblissement.

Dans quelques expériences on a cependant observé des traces de réflexion, en opérant avec des lames très minces de verre : c'est que le verre employé n'était probablement pas un isolant parfait et avait par suite un certain pouvoir absorbant, ce qui permettait à la réflexion de se produire, les interférences n'étant pas complètes.

M. Trouton a constaté une réflexion des ondes électromagnétiques sur un mur d'environ un mètre d'épaisseur.

Il a aussi opéré avec des lames de paraffine ; avec une lame de 2 centimètres d'épaisseur, il n'obtenait aucun résultat. La concordance entre les rayons incidents et les rayons réfléchis se produisait, dans les conditions où il opérait, pour une épaisseur de 13 centimètres.

Il s'attendait à n'obtenir aucun résultat avec une lame de 26 centimètres, mais il ne put observer nettement cet effet à cause de l'influence de l'absorption.

150. Position du plan de polarisation. — Nous avons à considérer ici deux sortes de vibrations les vibrations : électri-

que et magnétique ; il doit en être de même pour la lumière, d'après la théorie de Maxwell ; mais dans ce cas nous ne pouvons savoir quelle est la position du plan de polarisation par rapport aux vibrations. Ici, au contraire, nous connaissons la direction de la vibration électrique ; nous pouvons faire des expériences de réflexion en dirigeant la vibration électrique parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence ; l'expérience a montré que c'est quand la vibration électrique est contenue dans le plan d'incidence qu'il y a un angle de réflexion nulle. On en conclut que le plan de polarisation, défini comme en optique, est perpendiculaire à la vibration électrique.

151. Expériences de M. Klemencic (1). — Il a étudié la réflexion sur une lame de soufre de 120 centimètres de long, 80 de large et 7 d'épaisseur.

Cette épaisseur avait été calculée de façon qu'il y eût concordance entre les ondes réfléchies sur les deux faces de la lame pour l'incidence normale, et par suite sensiblement pour les incidences voisines de la normale.

M. Klemencic s'est servi d'un petit excitateur de Hertz, dont la longueur d'onde est de 60 centimètres ; les rayons étaient rendus parallèles au moyen d'un cylindre parabolique et reçus sur un second cylindre parabolique suivant la ligne focale duquel était disposé un résonateur.

Hertz avait déjà fait des expériences du même genre, avec un miroir de dimensions plus considérables et un excitateur de même période : l'effet sur le résonateur doit être moins

(1) Klemencic, *Académie des Sciences de Vienne*, séance du 19 février 1891. — *Revue gén. des Sciences*, t. II, p. 156. — *Lumière électrique*, t. XLI, p. 223.

grand dans les expériences de M. Klemencic que dans celles de Hertz, ce qui est bien conforme aux résultats obtenus.

Dans les expériences de M. Klemencic, on a pris successivement comme surface réfléchissante une plaque de soufre, une plaque métallique ou un réseau de fils métalliques.

La vibration électrique est parallèle aux génératrices du premier cylindre parabolique : en plaçant ce cylindre parallèlement au plan de réflexion, on rend les vibrations électriques perpendiculaires au plan d'incidence ; on peut, en plaçant le cylindre de façon que ses génératrices soient dans le plan d'incidence, rendre les vibrations parallèles à ce plan.

Ordinairement, le deuxième cylindre était placé dans la position symétrique du premier par rapport à un plan normal au plan de réflexion et passant par I (*fig.* 77), de manière à concentrer sur son axe les vibrations réfléchies ; on pouvait aussi croiser les deux cylindres ; l'action sur le résonateur devrait être nulle dans ce cas, mais on observe toujours un petit résidu.

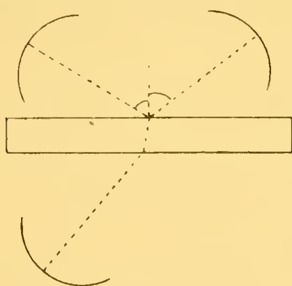


Fig. 77.

En plaçant le deuxième cylindre de l'autre côté de la plaque, on pouvait étudier les vibrations transmises.

M. Klemencic n'observait pas les vibrations en produisant des étincelles, mais en étudiant les effets thermiques par des piles thermo-électriques. Comme les étincelles de l'excitateur ne sont pas d'intensité constante, il faut éliminer l'influence de cette variation. Pour cela, M. Klemencic mesurait

le rapport de l'énergie transmise au résonateur secondaire à l'énergie transmise à un petit résonateur primaire invariablement relié au premier miroir parabolique.

Des fils pouvaient faire communiquer avec les bornes GG′ d'un galvanomètre les extrémités RR′ de l'appareil thermo-électrique fixé au résonateur secondaire, ou les extrémités EE′ de l'appareil du résonateur étalon.

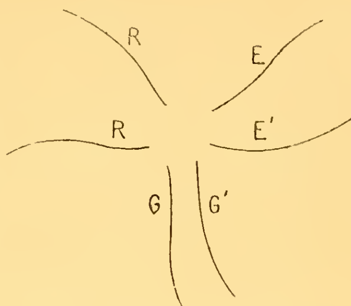


Fig. 78.

En faisant communiquer R et E avec G, R′ et E′ avec G′, on observe l'effet total :

$$e + r.$$

En faisant communiquer au contraire E et R′ avec G, E′ et R avec G′, on observe la différence des effets.

$$e - r.$$

De là on peut déduire e et r.

Cette disposition présente un inconvénient : les fils peuvent transmettre au résonateur secondaire les courants d'induction produits dans le résonateur étalon et influencer ainsi les phénomènes qui se passent dans le résonateur secondaire.

152. Résultats. — Soient α le rapport $\frac{r}{e}$, et β la valeur du même rapport quand la plaque réfléchissante est supprimée

(dans les expériences, on se contentait de tourner la plaque de 90°).

Ce rapport β correspond à l'effet direct de l'excitateur sur le résonateur secondaire, effet qui se produit avec la même intensité quelle que soit la position de la plaque. Sa différence α — β est proportionnelle à l'action réfléchissante.

Réflexion sur le soufre. — Il y a réflexion dans toutes les positions quand la vibration électrique est perpendiculaire au plan d'incidence.

Quand la vibration est contenue dans le plan d'incidence, il y a un angle d'incidence pour lequel les rayons réfléchis disparaissent.

Voici en effet les valeurs de α — β dans ce cas:

Angle d'incidence	Valeur de α — β
30°	0,24
40°	0,11
50°	0,05
60°	0,01 (extinction sensiblement complète)
65°	0,03

Les formules de Fresnel sur la réflexion vitreuse ne sont pas bien vérifiées par les résultats des expériences de M. Klemencic.

Cela provient de ce que l'accord entre les vibrations réfléchies sur les deux faces, qui a été réalisé pour l'incidence normale, ne l'est plus quand l'angle d'incidence prend des valeurs croissantes; ces vibrations interfèrent, ce qui altère la valeur du pouvoir réflecteur.

Réflexion sur une plaque métallique ou sur un réseau. — M. Klemencic a mesuré le pouvoir réflecteur des plaques

métalliques sous différentes incidences et a trouvé qu'il varie suivant une loi complexe. Il a obtenu des résultats analogues avec les réseaux métalliques.

Réfraction. — Les plaques métalliques ne laissent pas passer les vibrations électriques : ce résultat était connu avant les expériences de M. Klemencic et n'en ressort d'ailleurs pas très nettement, à cause des courants induits dont nous avons parlé.

Avec une lame de soufre, la quantité d'énergie transmise augmente quand la quantité réfléchie diminue, et inversement, comme il était facile de le prévoir.

Cependant, au lieu de trouver que la somme de l'énergie transmise et de l'énergie réfléchie est égale à l'énergie incidente, M. Klemencic a trouvé que cette somme est supérieure à l'énergie incidente.

Ainsi, dans la réflexion sur une plaque métallique, il n'y a pas de vibrations transmises et on a trouvé, pour l'incidence de 40° par exemple, en représentant par 1 l'intensité des rayons incidents, 1,92 pour celle des rayons réfléchis.

En opérant avec une lame de soufre, on a trouvé en représentant toujours par 1 l'intensité des rayons incidents :

1° Vibration électrique parallèle au plan d'incidence.

Angle de réflexion	Rayons réfléchis	Transmis	Total
30°	0,24	0,90	1,14
50°	0,10	1,25	1,31
65°	0,03	1,34	1,37

2° Vibration perpendiculaire au plan d'incidence :

Angle de réflexion	Rayons réfléchis	Transmis	Total
30°	0,28	0,89	1,17
40°	0,68	0,79	1,47
50°	0,63	0,52	1,15

Ainsi, les sommes indiquées dans la dernière colonne sont toutes plus grandes que l'unité. M. Klemencic attribue ces résultats à des effets de diffraction. Nous pouvons les rapprocher des résultats obtenus par MM. Sarasin et de la Rive pour les maxima de leurs courbes d'interférences (paragraphe 130). Il est bien probable que l'explication d'un de ces deux faits conduira immédiatement à celle du second.

APPENDICE AU CHAPITRE VII

---

153. *a.* **Expériences de M. Righi.** — Depuis que j'ai terminé ce cours, des expériences de M. Righi sont venues jeter le doute sur les résultats obtenus par MM. Klemencic et Trouton au sujet de la position du plan de polarisation.

M. Righi se servait d'un excitateur formé de deux petites sphères *a* et *b* plongées dans un liquide diélectrique (huile de vaseline); près de ces sphères, qui sont isolées, on en place deux autres *c* et *d* qui sont en communication avec les conducteurs d'une machine de Holtz. Une série d'étincelles éclate dans les trois intervalles *ca*, *ab* et *bd*; l'étincelle *ab*, qui est l'étincelle oscillante, éclate dans l'huile comme dans l'appareil de MM. Sarasin et de la Rive décrit plus haut.

Avec cet excitateur M. Righi a obtenu des longueurs d'onde de 7 à 20 centimètres. Il se servait de résonateurs rectilignes et de miroirs paraboliques.

Grâce à la petitesse de la longueur d'onde, le savant italien espérait diminuer les perturbations dues à la diffraction.

Il étudia d'abord la réflexion sur une lame de zinc. Si l'axe de l'excitateur, c'est-à-dire la force électrique, est perpendiculaire au plan de réflexion, l'intensité de la radiation réfléchie décroît quand l'angle d'incidence croît, jusqu'à un

certain minimum, et va ensuite en croissant. C'est ce qui arrive dans la réflexion métallique de la lumière quand le plan de polarisation est perpendiculaire au plan de réflexion. Si l'axe de l'excitateur est dans le plan de réflexion, l'intensité reste au contraire sensiblement constante ; on sait que, dans la réflexion de la lumière, l'intensité croît avec l'angle d'incidence quand le plan de polarisation coïncide avec le plan de réflexion.

On serait ainsi conduit à conclure, contrairement aux idées de M. Klemencic, que le plan de polarisation est perpendiculaire à la force magnétique, et cette manière de voir serait confirmée par les autres expériences faites avec un miroir métallique, en plaçant l'axe de l'excitateur obliquement par rapport au plan de réflexion.

Mais, en opérant ensuite avec des miroirs diélectriques, M. Righi est arrivé à un résultat opposé. Ses expériences ne peuvent s'expliquer qu'en admettant que le plan de polarisation est perpendiculaire à la force électrique. « Comme ce second résultat, dit-il, est en harmonie avec la théorie, tandis que le premier y contredit, il me semble qu'il faut regarder comme vrai le second, en se réservant de continuer l'étude de ces phénomènes et particulièrement de la réflexion des oscillations elliptiques sur les métaux, dans l'espoir de trouver la cause des propriétés singulières de ces corps. »

J'ajouterai que M. Righi a étudié avec ses appareils de curieux phénomènes de diffraction produits par des fils ou des bandes métalliques, ou par des bâtons diélectriques. (*Atti de l'Academia dei Lincei*, 1893.)

b. **Expériences de M. Garbasso.** — Soit E un excitateur et R un résonateur. L'excitateur mettra R en vibration, même si les périodes ne sont pas les mêmes, mais d'autant mieux qu'elles seront plus voisines. C'est le phénomène de la résonance multiple. Si on interpose entre E et R un écran métallique, l'action de E sur R cessera.

M. Garbasso, au lieu d'un écran continu, interpose un écran formé d'un grand nombre de résonateurs R′ tous pareils entre eux. Il observe alors que l'action de E sur R est arrêtée si R′ et R sont de même période et qu'elle ne l'est pas dans le cas contraire.

Tout se passe donc comme si l'excitateur émettait une série de radiations de périodes variables, parmi lesquelles celles qui auraient même période que R′ seraient seules arrêtées par l'écran.

Ces expériences s'expliquent donc très bien avec la manière de voir de MM. Sarasin et de la Rive et on pourrait être tenté de croire qu'elles condamnent l'explication que j'ai donnée de la résonance multiple. Ce serait oublier ce que j'ai dit plus haut, à savoir que mon explication, si opposée qu'elle paraisse à la théorie des savants genevois, y rentre au contraire comme cas particulier, puisqu'une fonction quelconque peut toujours être représentée par l'intégrale de Fourier. Elle rendrait donc compte de la même manière des expériences de M. Garbasso.

CHAPITRE VIII

ÉTUDE DU MÉMOIRE DE HERTZ SUR LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE POUR LES CORPS EN MOUVEMENT (1).

154. Notations. — Rappelons les notations de Hertz.

La force électrique est représentée par	X, Y, Z.
La force magnétique.	L, M, N.
L'induction électrique	εX, εY, εZ.
L'induction magnétique	μX, μY, μZ.

Le flux de force électrique à travers un élément de surface $d\omega$ est :

$$(\alpha Y + \beta Y + \gamma Z)\, d\omega.$$

et le flux total à travers une surface fermée est :

$$\int (\alpha Y + \beta Y + \gamma Z)\, d\omega.$$

(1) Hertz, *Wied. Annalen*, t. XLI, p. 363. — *Lumière électrique*, t. XXXVIII, p. 487 et 542.

En divisant par 4π le flux de force électrique qui traverse une surface fermée, on obtient ce qu'on appelle l'électricité libre contenue à l'intérieur de cette surface. On définit d'une façon semblable l'électricité vraie, les magnétismes vrai et libre.

Désignons par m la densité du magnétisme vrai, m_1 celle du magnétisme libre, et de même par e la densité de l'électricité varie et e_1 celle de l'électricité libre. On a :

$$4\pi m = \frac{d.\mu L}{dx} + \frac{d.\mu M}{dy} + \frac{d\mu N}{dz}.$$

$$4\pi m_1 = \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz}$$

$$4\pi e = \frac{d.\varepsilon X}{dx} + \frac{d.\varepsilon Y}{dy} + \frac{d.\varepsilon Z}{dz}$$

$$4\pi e_1 = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}.$$

155. Expression de la force électromotrice dans un circuit en mouvement. — Les premières équations de Hertz sont de la forme :

$$A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}.$$

Pour obtenir cette formule, nous avons écrit que la force électromotrice totale qui s'exerce dans un circuit fermé est égale à la variation du flux d'induction magnétique qui traverse une surface quelconque limitée à ce circuit, à un facteur constant près dépendant des unités choisies.

Supposons maintenant le circuit en mouvement; le flux de force qui traverse le circuit varie pour deux raisons :

1° parce que le champ est variable lui-même ; 2° parce que le circuit se déplace.

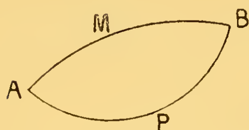


Fig. 79.

Revenons un moment au cas où le circuit est immobile ; faisons passer par le circuit AB deux surfaces, AMB et APB (*fig.* 79). Soit au temps t :

F le flux qui traverse . . . . AMB

et

F'. . . . . APB

en $t + dt$,

$F + dF$ . . . . AMB

$F' + dF'$. . . . . APB.

La force électromotrice qui s'exerce dans le circuit peut s'écrire indifféremment :

$$A \frac{dF}{dt} \text{ ou } A \frac{dF'}{dt},$$

ce qui exige que les deux dérivées soient égales, pour que la définition de la force électromotrice ait un sens. C'est ce qui arrive en effet : $F - F'$ est le flux d'induction total qui traverse la surface fermée AMPB. Ce flux est égal au facteur 4π multiplié par la quantité de magnétisme vrai qui se trouve à l'intérieur de la surface. Les corps étant supposés immobiles, cette quantité de magnétisme restera constante, sauf dans des circonstances très particulières. On aura donc bien :

$$F - F' = C^{te},$$

d'où

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF'}{dt}.$$

Supposons maintenant que le circuit soit en mouvement ; au temps $t + dt$, les surfaces AMB et APB seront venues en $A_1M_1B_1$ et $A_1P_1B_1$; soient $F + \delta F$ et $F' + \delta F'$ les flux d'induction qui les traversent alors. La force électromotrice a pour expression :

$$A\frac{\delta F}{\delta t} \text{ ou } A\frac{\delta F'}{\delta t}.$$

Il faut donc que l'on ait $\delta F = \delta F'$, ce qui a encore lieu, comme dans le cas précédent, si l'on suppose que les aimants qui peuvent figurer dans le système soient permanents et emportent avec eux leur magnétisme vrai. Mais cela n'a lieu que si les surfaces $A_1M_1B_1$ et $A_1P_1B_1$ sont constituées par les points qui constituaient à l'instant t les surfaces AMB et APB.

Il faudra donc, dans cette étude, pour calculer la force électro-motrice dans un circuit, considérer les différentes positions d'une même surface limitée au circuit et non pas dans chaque cas une surface quelconque.

156. Établissement de la formule fondamentale de l'induction dans un circuit en mouvement. — La force électromotrice totale qui s'exerce dans un circuit est représentée par l'expression :

$$\int (X dx + Y dy + Z.dz).$$

Soient A_0 et B_0 les deux points où le circuit considéré

coupe le plan de la figure au temps t (*fig.* 80); $A_0M_0B_0$, la position au même temps d'une surface limitée à ce circuit; au temps $t + dt$, cette surface sera venue en $A_1M_1B_1$. Construisons une surface annulaire $A_0B_0.A_1B_1$, de façon que l'ensemble des trois surfaces $A_0M_0B_0$, $A_1M_1B_1$, $A_0B_0\ A_1B_1$, limitent un volume. Désignons par $\mathfrak{M}$ la quantité de magnétisme vrai qui se trouve à l'intérieur de ce volume et soient au temps $t + dt$:

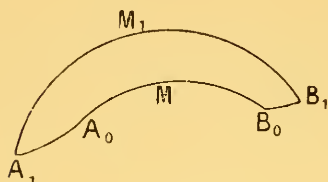


Fig. 80.

$F + \delta F$ le flux d'induction magnétique à travers $A_1M_1B_1$
$F + dF$ . . . . $A_0M_0B_0$
F'. . . . . $A_1B_1A_0B_0$.

Écrivons que le flux total d'induction qui traverse la surface fermée est égal à $4\pi\mathfrak{M}$. On aura :

$$F + \delta F - (F + dF) - F' = 4\pi\mathfrak{M}$$

ou

$$\delta F = dF + F' + 4\pi\mathfrak{M}. \qquad (1)$$

Evaluons F'; pour cela considérons deux points P et P′ du circuit dans sa première position, de coordonnées x, y, z et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$.

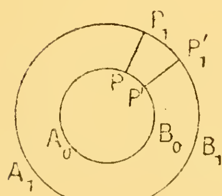


Fig. 81.

En $t + dt$, ces points sont venus en P_1, et P'_1, la figure $PP'P_1P'_1$ étant assimilable à un parallélogramme (*fig.* 81).

Si on désigne par ξ, η, ζ, les composantes de la vitesse du

point P, les coordonnées de P_1, sont :

$$\left\{\begin{array}{l} x + \xi.dt \\ y + \eta.dt \\ z + \zeta.dt. \end{array}\right.$$

Soient $d\omega$ la surface du petit parallélogramme et α, β, γ les cosinus directeurs de sa normale; les aires des projections du parallélogramme sur les plans de coordonnées sont :

$$\alpha.d\omega \qquad \beta.d\omega \qquad \gamma.d\omega$$

et l'on a :

$$\alpha.d\omega = (\eta dz - \zeta.dy)dt.$$
$$\beta.d\omega = (\zeta.dx - \xi.dz)dt.$$
$$\gamma.d\omega = (\xi.dy - \eta.dx)dt.$$

Le flux d'induction F′ peut donc s'écrire :

$$F' = \int(\alpha.\mu L + \beta.\mu M + \gamma\mu.N)d\omega = \int\Sigma.\mu.L.dt(\eta dz - \zeta dy)$$

A la place du terme $L\eta dz$ on peut mettre sous le signe $\sum$ le terme $M\zeta dx$ qui s'en déduit par permutation ; de même à la place de $L\zeta dy$ on peut mettre $N.\eta.dx$, de sorte que F′ peut s'écrire :

$$F' = \int\Sigma.\mu.dt.dx(M\zeta - N\eta)$$

ou bien en posant :

$$X_1 = \mu(M\zeta - N\eta)$$
$$Y_1 = \mu(N\xi - L\zeta)$$
$$Z_1 = \mu(L\eta - M\xi)$$
$$F' = \int(X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz)\, dt.$$

Remarquons maintenant que la quantité de magnétisme vrai qui se trouve à l'intérieur de la surface fermée a forcément traversé cette surface pendant le temps dt, car les deux surfaces $A_0M_0B_0$ et $A_1M_1B_1$ étaient primitivement appliquées l'une sur l'autre et ne comprenaient, par suite, entre elles aucune quantité de magnétisme.

Or la quantité de magnétisme vrai ou permanent qui a pénétré à travers $A_1M_1B_1$ est nulle, puisque cette surface se déplace avec les molécules elles-mêmes qui la constituent et que le magnétisme permanent est entraîné par les corps en mouvement.

D'ailleurs, la surface annulaire A_0B_0 A_1B_1 est infiniment petite par rapport aux deux autres et la quantité de magnétisme vrai qui l'a traversée est sensiblement nulle.

Il reste donc seulement le magnétisme qui a traversé $A_0M_0B_0$. Supposons pour simplifier le calcul que cette surface $A_0M_0B_0$ soit un élément de surface d'étendue $d\omega$, normal à ox. On voit que l'on aura :

$$4\pi . M = 4\pi . m . d\omega . \xi . dt$$

Si la surface $A_0M_0B_0$ se réduit à un seul élément $d\omega$, la force électromotrice totale se réduit à :

$$\int (X dx + Y dy + Z dz) = d\omega \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right).$$

D'autre part, elle doit être, comme nous l'avons vu, égale à :

$$A \frac{\delta F}{dt}.$$

De même, quand la surface $A_0M_0B_0$ se réduira à un élé-

ment, il viendra :

$$F' = d\omega\left(\frac{dZ_1}{dy} - \frac{dY_1}{dz}\right)dt,$$

d'où :

$$A\frac{F'}{dt} = d\omega\left(\frac{dZ_1}{dy} - \frac{dY_1}{dz}\right).$$

Il ne nous reste plus à calculer, pour avoir tous les termes de l'équation (1), que dF. Or :

$$F = \mu L . d\omega,$$

d'où

$$A\frac{dF}{dt} = A . d\omega . \frac{d(\mu L)}{dt}.$$

L'équation (1) peut maintenant s'écrire :

$$A\frac{\delta F}{dt} = A\frac{dF}{dt} + A\frac{F'}{dt} + A . \frac{4\pi M}{dt}$$

ou :

$$d\omega\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) = A d\omega . \frac{d.(\mu L)}{dt} + A d\omega . \left(\frac{dZ_1}{dy} - \frac{dY_1}{dz}\right) + 4\pi A\xi m . d\omega$$

ou bien, en supprimant le facteur $d\omega$ commun aux deux membres :

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = A . \frac{d(\mu L)}{dt} + A\left(\frac{dZ_1}{dy} - \frac{dY_1}{dz}\right) + 4\pi A\xi m.$$

Nous obtiendrions de même deux autres équations analogues.

Rendons-nous compte de la signification de chacun des termes du second membre :

$A\frac{d(\mu L)}{dt}$ représente la force électromotrice d'induction due

à la variation du champ magnétique;

$A\left(\frac{dZ_1}{dy}-\frac{dY_1}{dz}\right)$, celle due au déplacement du circuit.

La signification du troisième terme est plus difficile à interpréter : il nous a été fourni seulement par le calcul.

157. Comparaison avec les équations de Maxwell. — Pour obtenir les équations correspondant à celles que nous venons d'écrire, Maxwell exprime comme Hertz que la force électromotrice est égale à la variation du flux d'induction magnétique.

Mais l'induction magnétique n'est pas la même chose dans les deux théories. Maxwell désigne par α, β, γ les composantes de la force magnétique, par A, B, C celles d'un vecteur, qu'il appelle la magnétisation, et par a, b, c celles de l'induction magnétique, qu'il définit au moyen des relations :

$$a = \alpha + 4\pi A.$$
$$b = \beta + 4\pi B.$$
$$c = \gamma + 4\pi C.$$

Pour les corps dénués de force coercitive, A, B, C sont proportionnelles à α, β, γ, et l'on aura :

$$a = \alpha + 4\pi K.\alpha = \alpha\,(1 + 4\pi K) = \mu\alpha.$$

On voit que a, b, c sont identiques aux composantes de l'induction magnétique telles que les considère Hertz quand il n'y a pas de magnétisme permanent.

Mais, pour les corps qui contiennent du magnétisme permanent, il n'en est plus de même. Maxwell suppose, en effet,

qu'on a toujours :

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0.$$

Tandis que, dans la théorie de Hertz, on a en désignant par m la densité du magnétisme permanent :

$$\frac{d.\mu L}{dx} + \frac{d.\mu M}{dy} + \frac{d.\mu N}{dz} = 4\pi m,$$

équation qui ne se ramène à la précédente que s'il n'y a pas de magnétisme permanent.

Dans la théorie de Hertz, le flux d'induction magnétique à travers une surface $A_0M_0B_0$ limitée au circuit diffère du flux traversant une autre surface $A_0P_0B_0$ de la quantité :

$$4\pi\mathfrak{M}$$

tandis que ces deux flux sont les mêmes avec les définitions de Maxwell.

Il résulte de là que, pour évaluer la force électromotrice dans le circuit, on peut prendre dans chaque cas, dans la théorie de Maxwell, une surface quelconque limitée à ce circuit, tandis que dans la théorie de Hertz il faut prendre une même surface dans ses différentes positions.

En somme, en remplaçant dans les équations de Hertz Z_1, Y_1 et m par leurs valeurs, on voit qu'elles prennent la forme :

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = A \cdot \frac{d.\mu L}{dt} + A\left[\frac{d}{dy} \cdot \mu(L\eta - M\xi) - \frac{dz}{d} \cdot \mu(N\xi - L\zeta)\right]$$
$$+ A\xi\left[\frac{d.\mu L}{dx} + \frac{d\mu M}{dy} + \frac{d.\mu N}{dz}\right].$$

Celles de Maxwell sont plus simples. La première est :

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = A\frac{da}{dt} + A\left[\frac{d}{dy}(\eta a - \xi\tau) - \frac{d}{dz}(\xi c - \zeta a)\right].$$

Il y a accord entre les formules de Hertz et celles de Maxwell seulement quand le système ne contient pas de magnétisme permanent.

158. Deuxième groupe d'équations fondamentales. — En exposant la théorie de Hertz pour les corps en repos nous avons trouvé des équations de la forme :

$$A\varepsilon\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi Au.$$

Ces équations signifient que le travail que produiraient des forces magnétiques si une masse magnétique égale à 1 parcourait un circuit fermé est égal à la dérivée par rapport au temps du flux d'induction électrique qui traverse le même circuit augmentée d'un terme proportionnel à la quantité d'électricité qui a traversé par conduction une surface limitée par le circuit.

Hertz admet que la même loi est vraie quand les corps sont en mouvement ; en répétant un calcul analogue à celui que nous avons fait, on arrive à des équations de la forme :

$$A.\frac{d.\varepsilon X}{dt} + A\left[\frac{dy}{d}\varepsilon(X\eta - Y\xi) - \frac{dz}{d}\varepsilon(Z\xi - X\zeta)\right]$$
$$+ A\xi\left[\frac{d.\varepsilon X}{dx} + \frac{d\,\varepsilon Y}{dy} + \frac{d\varepsilon Z}{dz}\right] = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi Au.$$

159. Magnétisation permanente. Comparaison des

formules de Hertz et de Maxwell. — Posons :

$$a = \mu L + 4\pi H$$
$$b = \mu M + 4\pi J$$
$$c = \mu N + 4\pi K$$

Le vecteur H, J, K ainsi défini est ce qu'on appelle la magnétisation permanente. En retranchant membre à membre les équations d'induction de Hertz et de Maxwell que nous avons écrites plus haut, nous obtiendrions des relations où ne figureraient plus que H, J, K. Ces relations, que nous n'étudierons pas, conduisent aux conclusions suivantes :

Supposons que les aimants entraînent avec eux la magnétisation permanente invariable : les formules de Hertz et de Maxwell sont alors équivalentes. C'est d'ailleurs le cas le plus général.

Mais supposons que la magnétisation varie, par exemple, sous l'influence de la chaleur ; il n'y a plus alors accord entre les deux formules.

Considérons, par exemple, un tore d'acier aimanté uniformément ; il n'y a pas dans ce tore de magnétisme vrai, mais la magnétisation n'y est pas nulle, car on peut la faire apparaître en coupant le tore en deux parties, ce qui constitue deux aimants.

Entourons le tore d'un fil conducteur en hélice et chauffons-le pour faire varier sa magnétisation ; d'après la formule de Hertz, il ne doit pas se produire dans le fil de courants d'induction, tandis que d'après la formule de Maxwell il doit s'en produire.

Peut-être d'ailleurs aucune des deux formules n'est-elle applicable à un cas de ce genre.

160. Signification du second groupe d'équations fondamentales. — Nous avons obtenu des équations de la forme :

$$A.\ \frac{d.\varepsilon X}{dt} + A\left[\frac{d}{dy}\,\varepsilon(X\eta - Y\xi) - \frac{d}{dz}\cdot\varepsilon(Z\xi - X\zeta)\right]$$
$$+ A\xi\left[\frac{d.\varepsilon X}{dx} + \frac{d.\varepsilon Y}{dy} + \frac{d.\varepsilon Z}{dz}\right] = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

Posons :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} &= 4\pi A U \\ \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} &= 4\pi A V \\ \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} &= 4\pi A W \end{aligned}\right.$$

U, V, W seront alors les composantes du courant total dont dépendra l'action électrodynamique.

Dans le cas du repos, on avait :

$$\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} = 4\pi A u + A\varepsilon\,\frac{dX}{dt}.$$

de sorte que ces actions étaient dues aux courants de conduction et aux courants de déplacement.

Nous allons chercher ici à quoi correspondent les différentes parties du courant total U, V, W. On peut écrire :

$$U = u + \frac{1}{4\pi}\,\frac{d.\varepsilon X}{dt} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dy}\,\varepsilon(X\eta - Y\xi) - \frac{d.}{dz}\,\varepsilon(Z\xi - X\zeta)\right]$$
$$+ \frac{\xi}{4\pi}\left[\frac{d.\varepsilon X}{dx} + \frac{d.\varepsilon Y}{dy} + \frac{d.\varepsilon Z}{dz}\right].$$

Le premier terme du second membre représente le courant de conduction.

Le second représente le courant de déplacement.

Le quatrième, qui peut s'écrire ξe, e désignant la densité de l'électricité vraie, représente ce qu'on appelle le courant de convection, c'est-à-dire le déplacement de la charge électrique avec une vitesse ξ, η, ζ ; M. Rowland a montré expérimentalement qu'un pareil courant peut produire le même effet qu'un courant de conduction ordinaire.

Cherchons maintenant à quoi correspond le troisième terme.

Supposons qu'un diélectrique se déplace dans un champ électrique constant et considérons une des petites sphères dont Poisson suppose formé un diélectrique ; placée dans un champ électrique, elle s'électrise par influence. Si elle arrive en se déplaçant dans une région où le champ a une intensité moins considérable, une partie de l'électricité positive traverse la sphère pour se recombiner avec une partie de l'électricité négative développée sur l'autre face ; il se produit ainsi de petits courants pouvant avoir sans doute une influence extérieure.

Des courants du même genre peuvent être dus à un changement d'orientation du diélectrique, même sans que le champ électrique varie. Ainsi, un observateur invariablement relié au diélectrique verra varier l'état de polarisation du diélectrique et il y aura par rapport à lui production de courants de déplacement.

M. Rœntgen pense avoir constaté l'effet de ce courant [1]. Il se servait d'un disque d'ébonite mobile autour d'un axe vertical et tournant entre deux plaques de verre sur lesquelles

[1] ROENTGEN, *Wied. Ann.*, t. XXXV, p. 264. — Consulter : POINCARÉ, *Electricité et Optique*, t. I, p. 303.

on avait collé des feuilles d'étain ; ces feuilles, divisées sur chaque plaque de verre en deux parties isolées, étaient chargées comme l'indique la figure, de sorte que chacun des points de la plaque d'ébonite se trouvait alternativement dans des champs de directions opposées.

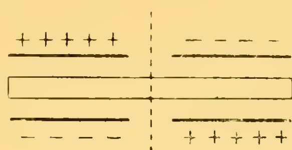


Fig. 82.

Ces expériences comportent bien des causes d'erreur et il faudrait les examiner de plus près pour en déduire une conséquence certaine. Mais on peut les rapprocher du courant indiqué par le troisième terme de U, de sorte que, en résumé, le courant total dont dépend l'action électrodynamique se compose de quatre parties :

1° Le courant de conduction ;

2° Le courant de déplacement ;

3° Le courant de convection (Rowland);

4° Le courant que nous venons d'indiquer (Rœntgen).

161. Expression des forces mécaniques qui s'exercent entre les corps en mouvement dans un champ électromagnétique. — Nous supposerons que le système ne comprend que des corps dénués de magnétisme ou des aimants permanents. Le système ne comprendra pas de fer doux ; de plus, on suppose que le seul diélectrique soit l'air.

D'ailleurs, nous avons vu qu'on pouvait sensiblement supposer $\varepsilon = 1$ pour tous les métaux, dans le cas des oscillations électriques : il n'en serait pas de même pour les oscillations lumineuses, qui sont beaucoup plus rapides.

Dans ces conditions, nous pouvons supposer $\varepsilon = \mu = 1$ et

écrire les équations :

$$\frac{dL}{dt} + \frac{d.}{dy}(\eta L - \xi M) - \frac{d.}{dz}(\xi N - \zeta L) + 4\pi\xi m = \frac{1}{A}\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)$$

$$\frac{dX}{dt} + \frac{d.}{dy}(\eta X - \xi Y) - \frac{d}{dz}(\xi Z - \zeta X) + 4\pi\xi e$$
$$= \frac{1}{A}\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right) - 4\pi u.$$

Nous aurions facilement par permutation les quatre autres équations.

Pour abréger nous allons écrire ces équations de la façon suivante, les lettres désignant les termes dont elles tiennent la place :

(1) $B + C + D = E'$
(2) $F + G + H = J + K.$

Nous aurions de même par permutation les équations :

(1′) $B' + C' + D' = E$
(1″) $B'' + C'' + D'' = E''$
(2′) $F' + G' + H' = J' + K'$
(2″) $F'' + G'' + H'' = J'' + K''.$

Nous allons appliquer le principe de la conservation de l'énergie, en écrivant que l'accroissement de l'énergie du système est égal à la somme du travail mécanique des forces extérieures et de la quantité de chaleur reçue de l'extérieur.

Additionnons membre à membre les six équations que nous venons d'écrire, après les avoir multipliées respectivement par les facteurs suivants :

(1) par $L\frac{d\tau}{4\pi}$ (2) par $X\frac{d\tau}{4\pi}$

(1′) par $M\frac{d\tau}{4\pi}$ (2′) par $Y\frac{d\tau}{4\pi}$

(1″) par $N\frac{d\tau}{4\pi}$ (2″) par $Z\frac{d\tau}{4\pi}$.

et intégrons par rapport à $d\tau$ en étendant l'intégration à tout l'espace.

Nous obtenons une relation de la forme :

$$B_1 + C_1 + D_1 + F_1 + G_1 + H_1 = E_1 + J_1 + K_1$$

où B_1, par exemple, est égal à l'intégrale :

$$\int \frac{(BL + B'M + B''N)d\tau}{4r}$$

et F_1 à :

$$\int \frac{(FX + F'Y + F''Z)d\tau}{4r}.$$

Nous allons chercher la valeur des différents termes.

On a d'abord :

$$E_1 + J_1 = \int \varepsilon.L \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)\frac{d\tau}{4\pi} + \int \varepsilon.X \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right)\frac{d\tau}{4\pi}.$$

Nous avons démontré (paragraphe 22) que cette expression était nulle. Rappelons seulement que nous avions trouvé :

$$\int \varepsilon.L \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)\frac{d\tau}{4\pi} = \int \frac{\Delta.d\omega}{4\pi} - \int \varepsilon.X \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right)\frac{d\tau}{4\pi},$$

d'où :

$$E_1 + J_1 = \int \frac{\Delta.d\omega}{4\pi}.$$

Nous avons vu que cette dernière intégrale est nulle quand on étend l'intégration à tout l'espace.

D'autre part :

$$K_1 = \int (u.X + vY + wZ) d\tau$$

n'est autre que l'expression de la chaleur de Joule.

Enfin :

$$B_1 + F_1 = \int \frac{L.dL + M.dM + N.dN + X.dX + Y.dY + Z.dZ}{4\pi dt} . d\tau$$

$$= \frac{d}{dt} \int \frac{L^2 + M^2 + N^2 + X^2 + Y^2 + Z^2}{8\pi} d\tau.$$

Cette expression est la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale.

Il résulte alors du principe de la conservation de l'énergie que la somme :

$$C_1 + D_1 + G_1 + H_1$$

représente la dérivée par rapport au temps du travail des forces mécaniques.

Soient :

$$\alpha.d\tau \qquad \beta.d\tau \qquad \gamma.d\tau$$

les composantes de la force appliquée à un élément de volume $d\tau$.

Le travail élémentaire effectué par les forces pendant un temps dt aura pour expression :

$$\int \alpha.d\tau.\xi.dt + \beta d\tau.\eta dt + \gamma d\tau.\zeta dt$$

ou :

$$\int (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\, d\tau.dt.$$

On aura donc :

$$C_1 + D_1 + G_1 + H_1 = \int (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\, d\tau.$$

De cette relation nous pouvons tirer, en identifiant, les valeurs de α, β, γ.

Pour obtenir par exemple α, nous allons supposer :

$$\eta = \zeta = 0.$$

Calculons D_1 :

$$D_1 = \int \frac{d\tau}{4\pi} [LD + MD' + ND'']$$

Mais :

$$D = 4\pi\xi m$$
$$D' = 4\pi\eta m = 0$$
$$D'' = 4\pi\zeta m = 0.$$

Il reste donc :

$$D_1 = \int \xi L m . d\tau,$$

d'où une première composante de α, Lm. C'est l'expression de la force magnétique ordinaire.

Calculons H_1 :

$$H_1 = \int \frac{d\tau}{4\pi} (XH + YH' + ZH'').$$

Mais :

$$H = 4\pi\xi e$$
$$H' = 4\pi\eta e = 0$$
$$H'' = 4\pi\zeta e = 0.$$

Il reste donc :

$$H_1 = \int \frac{d\tau}{4\pi} X e \xi,$$

d'où une deuxième composante de α, Xe. C'est l'expression de la force électrostatique ordinaire.

Calculons C_1 :

$$C_1 = \int \frac{d\tau}{4\pi} (LC + MC' + NC'')$$

et l'on a :

$$C = -\frac{d}{dy}(\xi M) - \frac{d}{dz}(\xi N)$$

$$C' = +\frac{d.}{dx}(\xi M)$$

$$C'' = +\frac{d.}{dx}(\xi N),$$

ce qui donne :

$$C_1 = \int \frac{d\tau.}{4\pi} \left[-L.\frac{d}{dy} \cdot (\xi M) - L \frac{d}{dz}(\xi N) + M \frac{d.}{dx}(\xi M) + N \frac{d.}{dx}(\xi N) \right] \cdot$$

Nous allons transformer cette expression en intégrant par parties :

$$\int L \frac{d.}{dy}(\xi M).d\tau = \int L \frac{d.}{dy}(\xi M)\, dx.dy.dz$$

$$= \int L.\xi.M.dx.dz - \int \frac{dL}{dy} \cdot \xi M dx.dy.dz.$$

La première intégrale est nulle si on l'étend à la surface

d'une sphère de rayon très grand, en supposant le champ nul à l'infini.

On peut transformer de même chaque partie de l'intégrale et écrire :

$$C_1 = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left[\xi M \frac{dL}{dy} + \xi N \frac{dL}{dz} - M\xi \frac{dM}{dx} - \xi N \frac{dN}{dx} \right],$$

d'où une troisième composante de α :

$$\frac{1}{4\pi} \left[M \left(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} \right) + N \left(\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx} \right) \right].$$

Mais nous avons posé au début du n° 160 :

$$\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} = 4\pi AU$$

$$\frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} = 4\pi AV$$

$$\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} = 4\pi AW.$$

Cette composante peut donc s'écrire :

$$A\,(W.M - V.N).$$

Elle représente l'action subie par un courant placé dans un champ magnétique, et le courant qui intervient ici est le courant total :

$$U,\ V,\ W,$$

somme des courants de conduction, de déplacement, de Rowland et de Rœntgen.

Ainsi les courants de déplacement, de convection et celui que nous pouvons désigner par courant de Rœntgen subissent

une action aussi bien que le courant de conduction. Ceci est d'ailleurs nécessaire d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction : nous avons vu que ces courants exercent une action mécanique ; ils doivent donc également en subir une.

Il resterait à chercher la signification de la composante correspondant au terme G_1 ; elle est restée jusqu'ici insensible aux expériences, mais elle se rattache à la considération suivante :

Un élément de courant variable produit un champ électrique qui influe sur un petit conducteur placé dans le voisinage. En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, l'élément de courant variable placé dans un champ électrique doit lui-même subir une action.

L'existence de ces forces n'a d'ailleurs pas encore été constatée expérimentalement, peut-être parce qu'elles sont trop faibles pour être mises en évidence par les moyens actuels.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

Exposé de la théorie

CHAPITRE II

Les oscillations hertziennes

CHAPITRE III

Etude théorique des oscillations hertziennes

CHAPITRE IV

Phénomène de résonance. — Propagation le long d'un fil

COMPLÉMENT AU CHAPITRE IV

Mesure directe de la vitesse de propagation

CHAPITRE V

Propagation des oscillations dans l'air

CHAPITRE VI

Applications de la théorie

CHAPITRE VII

Propagation des oscillations électriques dans les diélectriques autres que l'air

CHAPITRE VIII

Equations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en mouvement

Tours. — Imprimerie Deslis Frères.



Poincaré, Henri, 1854-1912.
Les oscillations électriques. Leçns
professées pendant le premier trimestr
1892-1893, par H. Poincaré. Rédigées
par m. Ch. Maurain. Paris, G. Carré,
1894.
2 p. ℓ., 343 p. diagrs. 26 cm. (Cour
de la Faculté des sciences de Paris.
Cours de physique mathématique)

